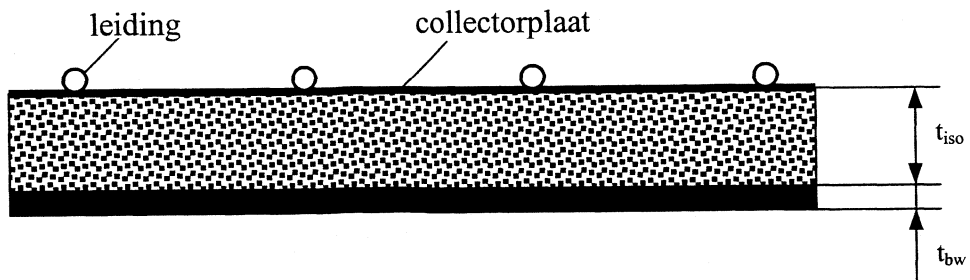
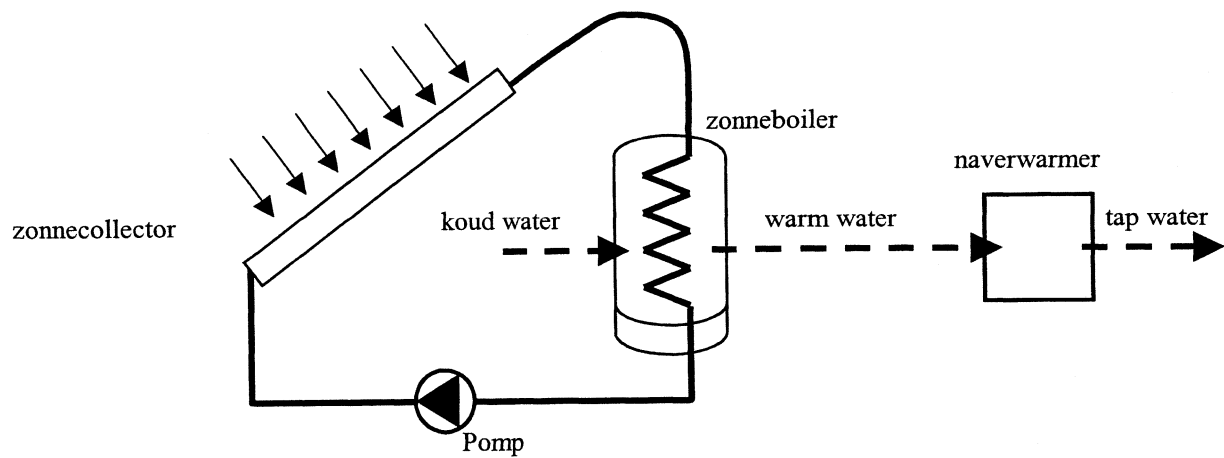


Collegedictaat IDE 231

Stroming en Warmteoverdracht voor IO

J.L. Spoormaker

Uitgave: April 2001



INHOUDSOPGAVE

SYMBOLENLIJST		v
1	INLEIDING	1
2	FLUÏDUMEIGENSCHAPPEN	3
2.1	HET FLUÏDUM	3
2.2	DE VISCOSITEIT	4
2.3	LAMINAIRE EN TURBULENTE STROMINGEN	8
2.3.1	LAMINAIRE STROMING	8
2.3.2	TURBULENTE STROMING	8
2.3.3	ONTWIKKELING VAN EEN STROMING	8
2.4	HET KENGETAL VAN REYNOLDS	9
2.5	DRUKVERLIES EN WARMTE-OVERDRACHT ALS FUNCTIE VAN HET KENGETAL VAN REYNOLDS	9
2.6	SAMENVATTING	11
2.7	OEFENOPGAVEN	12
2.7.1	KRACHTEN BENODIGD VOOR HET LANGS ELKAAR BEWEGEN VAN VLAKKE PLATEN	12
2.7.2	DRUKVERSCHIL OVER EEN LEIDING	12
3	BALANSEN EN WRIJVINGSLOZE STROMINGEN	13
3.1	VOLUMESTROOM EN MASSASTROOM	13
3.2	DE MASSABALANS	15
3.3	DE ENERGIEBALANS	17
3.4	DE WET VAN BERNOULLI	18
3.5	STATIONAIRE EN INCOMPRESSIBELE STROMINGEN	20
3.6	TOEPASSINGEN	21
3.6.1	VRIJE UITSTROMING UIT EEN VAT	21
3.6.2	DE VENTURI-BUIS	22
3.7	SAMENVATTING	23
3.8	OEFENOPGAVEN	24
3.8.1	BUIS MET WATER EN VLOEISTOF	24
3.8.2	U-BUIS	24
3.8.3	VERNAUWING IN EEN PIJP	24
3.8.4	VENTURI-BUIS	24
4	LAMINAIRE VISKEUZE STROMINGEN	25
4.1	COUETTE STROMING	25
4.2	VLAKKE POISEUILLE STROMING	28
4.3	LAMINAIRE STROMING IN EEN RONDE BUIS	30
4.4	SAMENVATTING	32
4.5	OPGAVEN	33
4.5.1	METEN VAN DE VISCOSITEIT VAN EEN VLOEISTOF	33
4.5.2	POISEUILLE STROMING IN EEN SPLEET	33
4.5.3	WATER EN VLOEIBARE KUNSTSTOF DOOR EEN BUIS	34
4.5.4	LAMINAIRE STROMING DOOR EEN RONDE BUIS	34
4.5.5	OLIERESERVÓIRS	34

5	TURBULENTIE	35
5.1	HET BEGRIP TURBULENTIE	35
5.2	TURBULENTE STROMINGEN	37
5.3	ONTSTAAN VAN TURBULENTIE	38
5.4	SAMENVATTING	39
6	LAMINAIRE EN TURBULENTE STROMING DOOR BUIZEN	41
6.1	DE STROMINGSWEERSTAND IN EEN RECHTE BUIS	41
6.1.1	DE BUISWEERSTANDSFACITOR f	41
6.1.2	LAMINAIRE STROMING: $Re_D < 2\ 000$	41
6.1.3	HET KRITIEK GEBIED: $2\ 000 < Re_D < 4\ 000$	41
6.1.4	HET TURBULENT GEBIED: $Re_D > 4\ 000$	42
6.2	HET SNELHEIDSPROFIEL VAN EEN LAMINAIRE EN EEN TURBULENTE STROMING	44
6.3	INSTROOMVERLIES	44
6.4	UITSTROOMVERLIES	45
6.5	AFSLUITERS EN TERUGSLAGKLEPPEN	46
6.6	BOCHTEN	47
6.7	SAMENVATTING	49
6.8	OEFENOPGAVEN	50
6.8.1	EEN BELUCHTINGSLEIDING	50
6.8.2	VOORRAADVAT OP ZOLDER	51
7	WEERSTAND VAN OMSTROOMDE LICHAMEN	53
7.1	GRENSLAGEN	53
7.1.1	OMSLAG	54
7.1.2	LOSLATING VAN GRENSLAGEN	55
7.2	DE WEERSTANDSCOËFFICIËNT	56
7.3	SAMENVATTING	60
7.4	OEFENOPGAVE	61
7.4.1	VOLKSWAGEN KEVER CABRIO	61
8	WARMTE, WARMTESTROOM EN WARMTEBALANS	63
8.1	HET BEGRIP WARMTE	63
8.2	SOORTELIJKE WARMTE	64
8.3	SMELTWARMTE EN VERDAMPINGSWARMTE	65
8.4	WARMTESTROOM Φ_w EN WARMTEBALANS	67
8.5	SAMENVATTING	70
8.6	OEFENOPGAVE	71
8.6.1	EEN KOPEREN BOL	71

9	WARMTETRANSPORT	73
<hr/>		
9.1	WARMTEGELEIDING	73
9.2	DE RANDVOORWAARDEN	77
9.3	ÉÉNDIMENSIONALE STATIONAIRE WARMTEGELEIDING ZONDER WARMTEPRODUCTIE	77
9.4	CONVECTIE	79
9.5	VLAKKE WAND MET FLUÏDA AAN BEIDE ZIJDEN	80
9.6	WARMTE-OVERDRACHT DOOR STRALING	82
9.8	SAMENVATTING	85
9.9	OEFENOPGAVEN	87
9.9.1	VRIESKIST	87
9.9.2	CONDUCTIEF EN CONVECTIEF WARMTESTRANSPORT	87
9.9.3	WARMTEOVERDRACHT DOOR STRALING TUSSEN TWEE CONCENTRISCHE CILINDERS	88
10	CONVECTIEVE WARMTE-OVERDRACHT TUSSEN EEN WAND EN EEN FLUÏDUM	89
<hr/>		
10.1	DE DERDE RANDVOORWAARDE (CONVECTIE $\rightarrow \alpha$)	89
10.2	DE MENGTEMPERATUUR	90
10.3	HET KENGETAL VAN NUSSELT	90
10.4	DE AFHANKELIJKHEID VAN DE WARMTE-OVERDRACHTSCOËFFICIËNT VAN DE STROMING EN DE THERMISCHE EIGENSCHAPPEN VAN HET FLUÏDUM.	93
10.5	EMPIRISCHE FORMULES VOOR DE BUISSTROMING	94
10.5.1	LAMINAIRE STROMING	94
10.5.2	TURBULENTE STROMING	94
10.6	WARMTE-OVERDRACHT BIJ CILINDERS	96
10.7	KOELPENNEN EN KOELVINNEN	97
10.7.1	INLEIDING	97
10.7.2	CILINDRISCHE KOELPEN	98
10.7.3	HET RENDEMENT VAN KOELPENNEN EN KOELVINNEN.	100
10.8	SAMENVATTING	103
10.9	OEFENOPGAVEN	104
10.9.1	WARMTEOVERDRACHT VAN VERBRANDINGS GAS NAAR WATER	104
10.9.2	CONVECTIEF WARMTETRANSPORT IN EEN COLLECTOR	105
11	AFKOELING EN OPWARMING VAN LICHAMEN	107
<hr/>		
11.1	INLEIDING	107
11.2	LICHAAM MET EEN UNIFORME TEMPERATUURVERDELING	108
11.3	ÉÉNDIMENSIONALE WARMTE-OVERDRACHT IN PLATEN, CILINDERS EN BOLLEN.	114
11.4	SAMENVATTING	118
11.5	OEFENOPGAVE	119
11.5.1	DE BITTERBAL	119
11.5.2	OPWARMING MESSING CILINDERS	119
APPENDICES		1
<hr/>		
A	TOELICHTING OP HET DICTAAT EN DE LEERSTOF	2
B	EENHEDEN, FORMULES EN KENGETALLEN DIE UIT HET HOOFD GELEERD MOETEN WORDEN	3
C	OEFENOPGAVE 'DE ZONNEBOILER'	7
D	ANTWOORDEN VAN DE OEFENOPGAVEN	11
E	DIMENSIE-ANALYSE	17
F	TREFWOORDENREGISTER	20
G	LITERATUUR	23

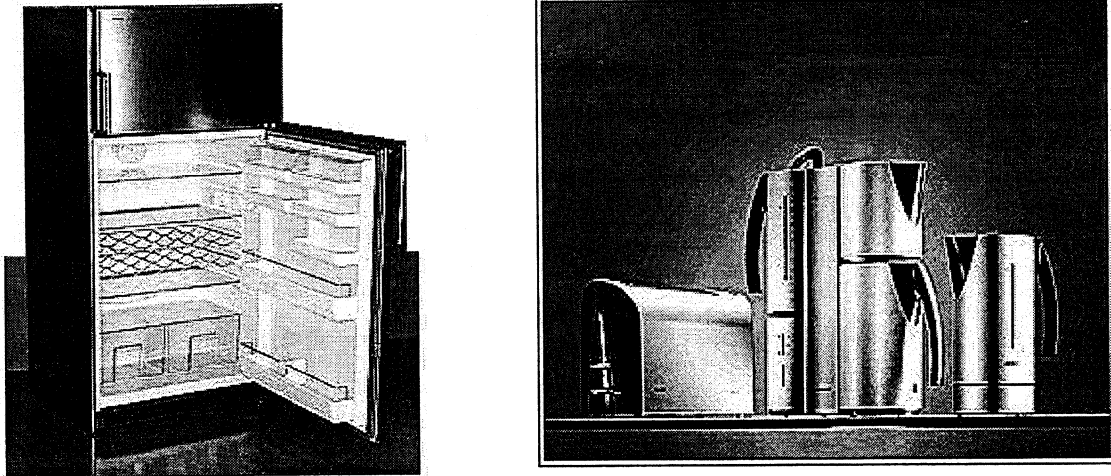
Symbolenlijst

Symbol	Benaming	Eenheid
a	versnelling	m/s^2
a	temperatuurvereffeningscoëfficiënt	s/m^2
A	oppervlakte	m^2
b	breedte	m
Bi	kengetal van Biot	
c	soortelijke warmte	J/kgK
C	integratie constante	
C_w	weerstandcoëfficiënt	
D	diameter	m
f	(buis) weerstandsfactor	
F	kracht	N
g	gravitatieversnelling	m/s^2
h	hoogte	m
H	plaatdikte	m
k	ruwheid	m
L	lengte	m
L_s	smeltwarmte	J/kg
L_v	verdampingswarmte	J/kg
m	massa	kg
M	moment	Nm
Nu	kengetal van Nusselt	
p	druk	N/m^2
P	vermogen	W
Pa	druk in Pascals	N/m^2
Pr	kengetal van Prandtl	
Q	warmte	J
Re	kengetal van Reynolds	
r_{th}	specifieke thermische weerstand	$m^2 K/W$
R_{th}	thermische weerstand	K/W
u	snelheid in de x-richting	m/s
t	tijd	s
U	energie	J
v	snelheid	m/s
V	volume	m^3
W	arbeid	J
α	warmte-overgangcoëfficiënt	W/m^2K
γ	hoekverdraaiing	
γ^* of du/dy	afschuifsnelheid/snelheidsgradiënt	$1/s$
ε	emissiecoëfficiënt	
ζ	verliescoëfficiënt	
η	dynamische viscositeit	$Pa \cdot s$ of Ns/m^2
θ	temperatuur	$^{\circ}C$
λ	warmtegeleidingscoëfficiënt	W/mK
ρ	soortelijke massa	kg/m^3
σ	normaalspanning	N/m^2
τ	schuifspanning	N/m^2
ν	kinematische viscositeit	m^2/s
ϕ_m	massastroomdichtheid	kg/m^2s
Φ_m	massastroom	kg/s
Φ_v	volumestroom	m^3/s
ϕ_w	warmtestroomdichtheid	W/m^2
Φ_w	warmtestroom	W

1 Inleiding

Het doel van dit vak is studenten Industrieel Ontwerpen de basiskennis te geven van stromingsleer en warmte-overdracht. Voor veel producten die door industriële ontwerpers worden ontwikkeld, is deze basiskennis voldoende om specialisten op het gebied van stroming- en warmteoverdracht te kunnen raadplegen.

Enkele producten waarin warmte wordt ontwikkeld en waaruit de warmte moet worden getransporteerd zijn: koelkasten, waterkokers, broodroosters, koffiezetapparaten en (laptop)computers.



Figuur 1.01 *Producten waarin stroming en warmtetransport plaats vinden.*

Het dictaat bestaat uit twee delen: de hoofdstukken 1 t/m 7 gaan over stromingsleer en de hoofdstukken 8 t/m 11 over warmteoverdracht. Elk hoofdstuk eindigt met een samenvatting en enkele oefenopgaven; de antwoorden van deze oefenopgaven staan achter in het dictaat.

Opbouw van het dictaat

- Hoofdstuk 2* behandelt de **basisbegrippen van de stromingsleer** en er wordt een voorbeeld gegeven van de invloed van de stroming op de warmteoverdracht.
- Hoofdstuk 3* gaat in op de **volumabalans, de massabalans en de energiebalans**. Met de laatste balans kunnen berekeningen worden uitgevoerd aan wrijvingsloze stromingen
- Hoofdstuk 4* wordt besteed aan de berekening van **drukverliezen die optreden bij laminaire stromingen**.
- Hoofdstuk 5* behandelt **basisbegrippen uit de turbulentie**.
- Hoofdstuk 6* behandelt de berekening van **drukverliezen in buizen waarin laminaire of turbulente stroming** optreedt en er wordt aangegeven hoe het drukverlies ten gevolge van bochten en appendages in rekening kan worden gebracht.
- Hoofdstuk 7* gaat in op de **weerstand die omstroomde lichamen** ondervinden.
- Hoofdstuk 8* herhaalt de **basiskennis over warmte** van de middelbare school en geeft een uitbreiding hieraan met de begrippen warmtestroom en warmtebalans.
- Hoofdstuk 9* gaat over het warmtetransport in de vorm van **geleiding, convectie en straling**.
- Hoofdstuk 10* behandelt hoe het **convectieve warmtetransport** kan worden berekend.
- Hoofdstuk 11* gaat over **afkoeling en opwarmen** van lichamen en is bedoeld als basiskennis voor het bepalen van de afkoeltijden van gesputgiete producten.

De collegestof wordt behandeld aan de hand van de *warmwatervoorziening met een zonnecollector*.

2 Fluide eigenschappen

In dit hoofdstuk worden de onderstaande onderwerpen behandeld:

continuüm;
fluidum;
hechtvoorwaarde;
afschuifsnellheid ($\dot{\gamma}$ of du/dy);
viscositeit (dynamisch η en kinematisch ν);
laminaire en turbulente stromingen;
kengetal van Reynolds;

Zowel vaste stoffen, vloeistoffen en gassen kunnen vloeien en in dit hoofdstuk wordt uitgelegd hoe voor een **continuüm** de eigenschappen van **fluida** zijn te beschrijven. De **viscositeit**, de mate van stroperigheid, wordt toegelicht. De twee belangrijkste soorten van stroming: **laminaire en turbulente** worden behandeld. Het begrip **dimensieloos kengetal** wordt toegelicht aan de hand van het **kengetal van Reynolds**, waarmee bepaald kan worden of een stroming laminair of turbulent is.

2.1 Het fluidum

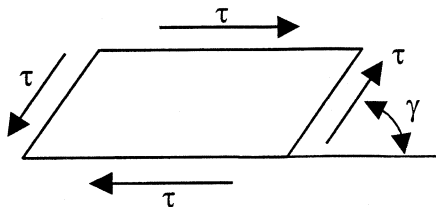
Vaste stoffen, vloeistoffen en gassen kunnen onder normale omstandigheden worden beschouwd als **continua**.

*Een **continuüm** heeft de eigenschap dat de relevante grootheden **continu** veranderen, wanneer van het beschouwde punt wordt overgegaan op een naburig punt, waarmee het mogelijk wordt in de omgeving van het beschouwde punt een voldoende klein gebied aan te wijzen, waarvoor deze eigenschappen als homogeen mogen worden beschouwd.*

Dit biedt de mogelijkheid om grootheden als dichtheid, snelheid en druk in een punt van de beschouwde materie te definiëren.

Een **fluidum** wordt gedefinieerd als:

*Een **fluidum** is een continuüm met de eigenschap dat in **rusttoestand** alleen drukspanningen aanwezig kunnen zijn.*



Figuur 2.01 Schuifspanning τ en hoekverdraaiing γ

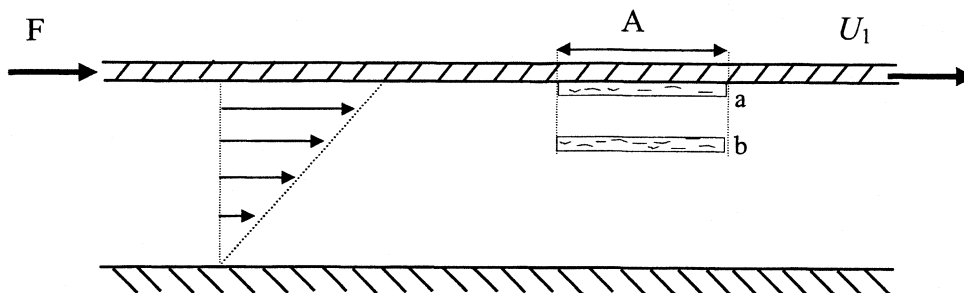
Essentieel is dat bij een bepaalde schuifspanning (zie figuur 2.01) **vloeien** optreedt.

- Bij **vaste stoffen** is dit bij het overschrijden van de vloeigrens.
- Bij **dikvloeibare vloeistoffen** treedt boven een bepaalde schuifspanning vloeien op. Is deze vloeigrens hoog, dan wordt deze vloeistof aangeduid als tyxotroop (yoghurt, honing).
- Bij **dunvloeibare vloeistoffen** en **gassen** is de drempelwaarde van de schuifspanning, waarboven vloeien optreedt, zo laag dat deze als fluida kunnen worden beschouwd. Onder invloed van schuifspanningen, hoe klein dan ook, gaat een fluidum dus bewegen en blijft het bewegen.

Experimenteel is gebleken dat verondersteld kan worden dat ieder fluïdum zich aan een wand hecht, dat wil zeggen dat de snelheid van de aan de wand grenzende fluïdumdeeltjes gelijk aan die van de wand is. Dit is de zogenaamde **hechtvoorwaarde**.

2.2 De viscositeit

We beschouwen de in figuur 2.02 geschetste stromingsconfiguratie.



Figuur 2.02 Snelheidsprofiel van een stroming tussen een vaststaande en een bewegende plaat

Tussen twee grote evenwijdige platen bevindt zich een fluïdum. Op de bovenplaat wordt een kracht F naar rechts uitgeoefend, de onderplaat beweegt niet. Experimenteel blijkt nu dat de bovenplaat eenparig gaat bewegen met een snelheid U_1 en dat de snelheid van het fluïdum lineair verloopt van 0 aan de onderplaat tot U_1 aan de bovenplaat.

De twee grenswaarden zijn uiteraard een gevolg van de hechtvoorwaarde. Het lineaire verloop is echter verrassend. Dit zal later in dit hoofdstuk nog bewezen worden. Fluïda met een eenvoudige moleculaire structuur, zoals lucht, water en glycerine vertonen in het algemeen dit lineaire snelheidsprofiel. Zij worden **Newtonse fluïda** genoemd.

Er zijn ook fluïda, zoals lijm en verf, die een niet-lineair snelheidsverloop hebben, waar we nu niet verder op in gaan.

Het lineaire snelheidsprofiel geeft de mogelijkheid de viscositeit η te definiëren. Hiertoe beschouwen we $1 \times 1 \text{ m}^2$ van het totale plaatoppervlak A . Daar de bovenplaat eenparig beweegt, moet het fluïdum, vanwege het benodigde krachterevenwicht,

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (2.01)$$

een naar links gerichte schuifspanning op de plaat uitoefenen. Deze wordt geleverd door de fluïdumlaag a, zie figuur 2.1, die echter ook eenparig beweegt en dus aan zijn onderzijde ook een schuifspanning τ zal ondervinden.

Deze redenering voortzettend komen we tot de conclusie dat iedere fluïdumlaag een aan de bovenzijde naar rechts en aan de onderzijde naar links gerichte schuifspanning τ zal ondervinden. Deze schuifspanning is dus overal in het fluïdum even groot. Het ligt voor de hand te veronderstellen dat de grootte van de schuifspanning afhankelijk is van het snelheidsveld.

De **afschuifnelheid (shear rate)** - ($\dot{\gamma}$ of du/dy) is gedefinieerd als:

De snelheid waarmee de vloeistoflagen t.o.v. elkaar bewegen en deze wordt wel als $\dot{\gamma}$ aangeduid. De hoekverdraaiing van een deeltje is γ .

De eenvoudigste grootheid van het snelheidsveld, is de **snelheidsgradiënt** du/dy en deze is voor een lineair verlopende snelheid, zoals in het beschouwde geval overal even groot. Er is een constante verhouding tussen de optredende schuifspanning τ en de snelheidsgradiënt (afschuifsnelheid) du/dy :

$$\tau = \eta \cdot \frac{du}{dy} \quad (2.02)$$

De dynamische viscositeit η is de verhouding tussen de optredende schuifspanning en de snelheidsgradiënt.

$$\eta = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (2.03)$$

Dit heet de **wet van Newton**, hetgeen ook de naam "Newtons fluïdum" verklaart. Vergelijking (2.03) is afgeleid van en toepasbaar op een eendimensionale stroming, een zogenaamde enkelvoudige afschuifstroming.

De **dynamische viscositeit** η is een fluïdumeigenschap, die sterk afhankelijk is van de temperatuur. Voor niet te hoge drukken, zeg tot enige bar, is η vrijwel onafhankelijk van de druk.

Op moleculaire schaal is de viscositeit te verklaren uit de onderlinge krachten en de impulsuitwisseling tussen de moleculen.

Bij *gassen* is de impulsuitwisseling bepalend. Daar de snelheden van de gasmoleculen bij hogere temperatuur groter zijn, zal de impulsuitwisseling ook groter zijn. De viscositeit van een gas zal dus stijgen met de temperatuur.

Bij *vloeistoffen* is de onderlinge aantrekkingskracht tussen de moleculen overheersend. Deze neemt bij toenemende temperatuur af, omdat de afstand tussen de moleculen dan groter wordt. De viscositeit van een vloeistof zal dus afnemen met toenemende temperatuur. In tabel 2.01 is de dynamische viscositeit η voor enige fluïda, gegeven.

Tabel 2.01 Waarden van de dynamische viscositeit van enkele fluïda (η in $N \cdot s/m^2$).

temperatuur	0 °C	20 °C	40 °C	60 °C	80 °C	100 °C
lucht	$1,71 \cdot 10^{-5}$	$1,81 \cdot 10^{-5}$	$1,90 \cdot 10^{-5}$	$2,00 \cdot 10^{-5}$	$2,09 \cdot 10^{-5}$	$2,18 \cdot 10^{-5}$
waterstof	$0,84 \cdot 10^{-5}$	$0,88 \cdot 10^{-5}$	$0,92 \cdot 10^{-5}$	$0,96 \cdot 10^{-5}$	$1,00 \cdot 10^{-5}$	$1,04 \cdot 10^{-5}$
water	$1,79 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^{-3}$	$0,74 \cdot 10^{-3}$	$0,65 \cdot 10^{-3}$	$0,36 \cdot 10^{-3}$	$0,28 \cdot 10^{-3}$
glycerine	10,6	1,49	0,28			
motorolie	3,85	0,80	0,21	0,072	0,032	0,017

In deze tabel is te zien dat de viscositeit van vloeistoffen sterker afhankelijk is van de temperatuur, dan die van gassen.

Rekenvoorbeeld 2.a:

toelichting: 2 platen die zich op een afstand h t.o.v. elkaar bevinden worden t.o.v. elkaar bewogen;

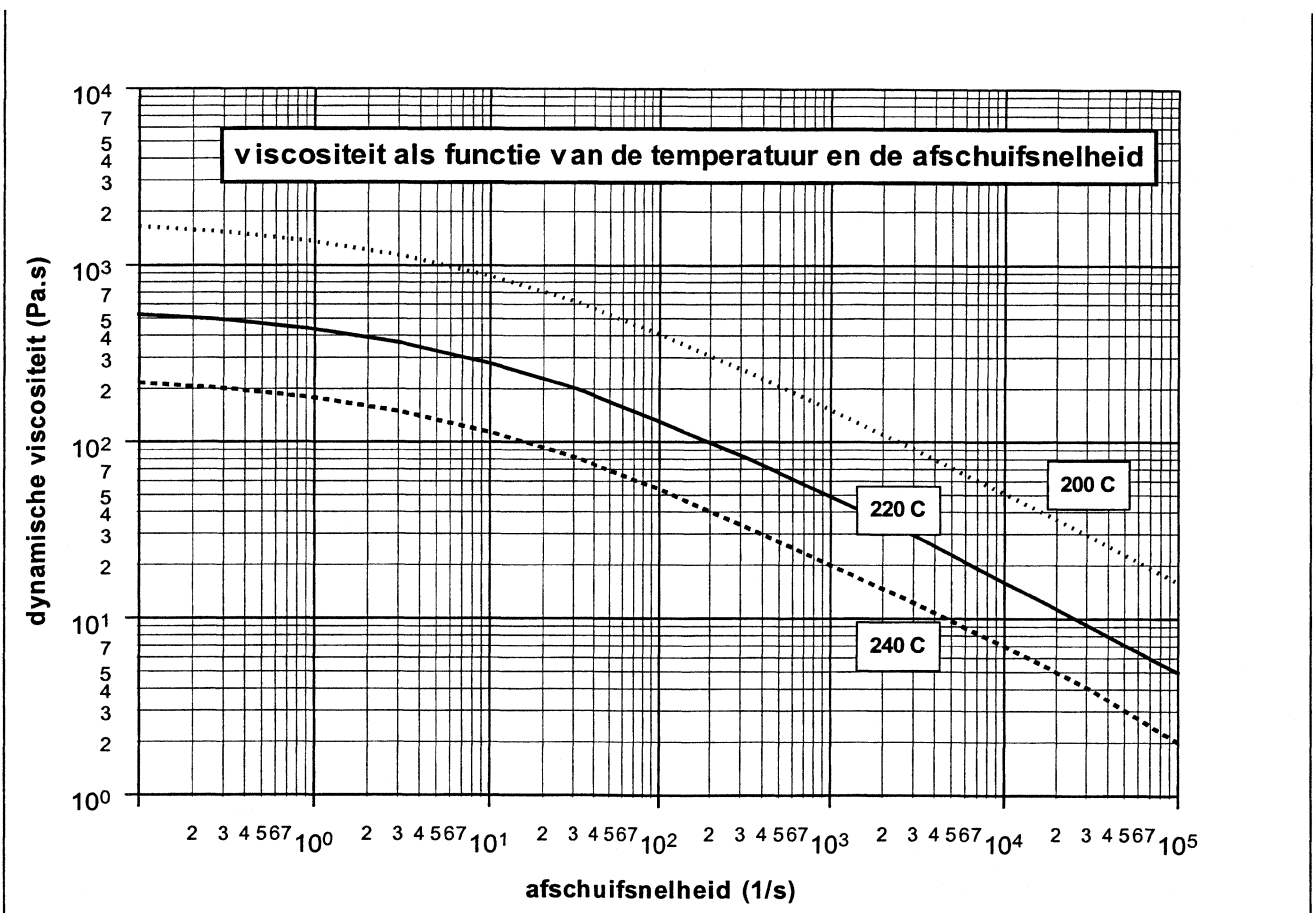
gegeven: oppervlak van de platen $A = 2 \text{ m}^2$; relatieve snelheid $v = 2 \text{ m/s}$;
afstand $h = 2 \text{ mm}$ dynamische viscositeit $\eta = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

gevraagd: de benodigde kracht F om de platen t.o.v. elkaar te bewegen

oplossing: de snelheidsgradiënt: $du/dy = 2/0,002 = 1\,000 \text{ s}^{-1}$
de viscositeit η : $\eta = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
de schuifspanning τ : $\tau = \eta \cdot du/dy = 0,8 \cdot 10^{-3} \cdot 1\,000 = 0,8 \text{ N/m}^2$
de benodigde kracht F : $F = \tau \cdot A = 0,8 \cdot 2 = 1,6 \text{ N}$

Voor waterachtige vloeistoffen is de dynamische viscositeit erg laag, dit in tegenstelling tot oliën en gesmolten kunststoffen

Bij **kunststoffen** is de viscositeit η zowel sterk afhankelijk van de afschuifsnelheid (shear rate) als van de temperatuur θ en dit is in figuur 2.03 voor Polystyreen geplot.



Figuur 2.03 Afhankelijkheid van de viscositeit η van de temperatuur en de afschuifsnelheid.

Tijdens de vulfase van een matrijs ligt de afschuifsnelheid tussen de 500 (1/s) en de $5 \cdot 10^4 \text{ (1/s)}$ en dit betekent dat de viscositeit bij $240 \text{ }^\circ\text{C}$ kan variëren tussen de $28 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ en de $3 \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

Tijdens de navulfase is de afschuifsnelheid (10 1/s) laag en de temperatuur van de smelt ook laag. Stel dat de temperatuur gedaald is tot 200 °C dan wordt de viscositeit 900 Pa.s. Dit verklaart de grote sluitkrachten en hoge drukken die nodig zijn bij het spuitgieten van kunststofproducten.

Rekenvoorbeeld 2.b:

toelichting: 2 platen die zich op een afstand h t.o.v. elkaar bevinden worden t.o.v. elkaar bewogen;

gegeven: oppervlak van de platen $A = 2 \text{ m}^2$; relatieve snelheid $v = 2 \text{ m/s}$;
afstand $h = 2 \text{ mm}$ **vloeibaar Polystyreen van 200 °C**

gevraagd: de benodigde kracht F om de platen t.o.v. elkaar te bewegen

oplossing: de snelheidsgradiënt: $du/dy = 2/0,002 = 1\,000 \text{ s}^{-1}$
de viscositeit η : $\eta = 160 \text{ Pa}\cdot\text{s}$
de schuifspanning τ : $\tau = \eta \cdot du/dy = 160 \cdot 1\,000 = 160\,000 \text{ N/m}^2$
de benodigde kracht F : $F = \tau \cdot A = 160\,000 \cdot 2 = 320\,000 \text{ N}$

Vergelijken we de resultaten van Rekenvoorbeeld 2.a en 2.b met elkaar dan blijkt dat er enorme krachten nodig zijn om gesmolten kunststoffen te laten vloeien.

De **kinematische viscositeit** ν is de dynamische viscositeit η gedeeld door de dichtheid ρ :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{2.04}$$

Als voorbeeld geven we hier de dynamische en de kinematische viscositeit voor lucht en water:

Lucht van 20°C en 1 bar: $\eta = 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$ $\rho = 1,205 \text{ kg/m}^3$, dus $\nu = 1,50 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.
Water van 20°C en 1 bar: $\eta = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$ $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$, dus $\nu = 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

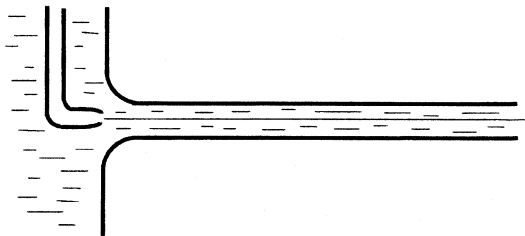
De waarden van de kinematische viscositeit van lucht en water liggen een orde dichter bij elkaar dan de waarden van de dynamische viscositeit.

Het internationale symbool voor de kinematische viscositeit is de Griekse letter ν , maar dit symbool is vrijwel niet te onderscheiden is van de schuine ν , het symbool voor de snelheid.

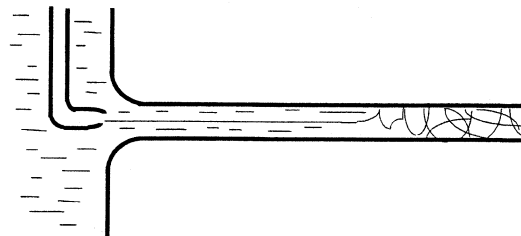
In dit dictaat wordt vrijwel alleen met de dynamische viscositeit η gewerkt en indien het overzichtelijker is om de kinematische viscositeit te gebruiken, dan wordt het symbool ν gebruikt.

2.3 Laminaire en turbulente stromingen

Beschouw de volgende proef, zie figuren 2.04a en 2.04b.



Figuur 2.04a *Laminaire stroming*



Figuur 2.04b *Turbulente stroming*

2.3.1 Laminaire stroming

Door een gladde pijp met goed afgeronde instroming stroomt water uit een groot vat. Bij de instroming wordt met een zeer dun buisje kleurstof geïnjecteerd. Voor kleine watersnelheden blijkt de kleurstof als een draad met het water mee te stromen. De fluïdumdeeltjes volgen dus, in dit geval, rechte banen evenwijdig aan de buiswand, zie figuur 2.04a.

Het geval uit figuur 2.04a noemen we een **laminaire** stroming. De eigenschappen van een laminaire stroming zijn:

de grootte van de snelheid van het fluïdum in ieder punt verandert niet in de tijd;
de richting van de snelheidsvector van het fluïdum in ieder punt verandert niet in de tijd.

Een **laminaire stroming** is dus **stationair**. In de afleiding van de viscositeit in 2.02 waren we dus al van een laminaire stroming uitgegaan.

2.3.2 Turbulente stroming

Als de snelheid van het water verhoogd wordt, dan treden er op een gegeven moment storingen op in de kleurstof-draad, die al snel tot een volledige menging van de kleurstof met het water leiden, zie figuur 2.04b. Kennelijk treden in de stroming nu snelheidsfluctuaties op, zowel in grootte als in richting. De snelheidsvector in een punt is nu **niet meer constant qua richting en grootte, maar varieert in de tijd**.

De stroming die in figuur 2.04b ontstaat, wordt een **turbulente stroming** genoemd.

2.3.3 Ontwikkeling van een stroming

Het lijkt een redelijke veronderstelling dat ver stroomafwaarts de stroming onafhankelijk is van de instroomcondities. We spreken in dit geval van een volledig ontwikkelde stroming. Deze stroming kan dus nog laminair of turbulent zijn.

2.4 Het kengetal van Reynolds

Om te bepalen of een bepaalde stroming laminair of turbulent zal zijn, wordt gebruik gemaakt van het zogenaamde kengetal van Reynolds.

De definitie van een **kengetal** is:

Een kengetal is een dimensieloos getal, verkregen uit fysische grootheden en geometrische afmetingen.

De reden dat er een dimensieloze groep gevormd wordt, is dat dit kengetal dan geldig is voor iedere stromingssituatie. Om hiervoor te zorgen, is het nodig om alle relevante variabelen hierin te betrekken. Deze zijn de pijpdiameter D , de fluïdumeigenschappen: ρ , η en de gemiddelde snelheid v_{gem} . We hadden natuurlijk ook een andere snelheid kunnen nemen, bijvoorbeeld de snelheid op de as van de pijp, maar in de praktijk is v_{gem} in het algemeen een handige grootheid. Uit deze vier grootheden is één dimensieloze grootheid te vormen die het **kengetal van Reynolds (Re)** wordt genoemd.

Kengetal van Reynolds:

$$Re_D = \frac{\rho \cdot v_{gem} \cdot D}{\eta} \quad (2.05)$$

De index D betekent dat het hier gaat om een stroming in een pijp (met diameter D). Bij een stroming in bijvoorbeeld een spleet met hoogte h wordt de index h gebruikt.

Er geldt dat:

voor **lage** waarden van Re_D is de stroming **laminair**;
voor **hoge** waarden van Re_D is de stroming **turbulent**.

2.5 Drukverlies en warmte-overdracht als functie van het kengetal van Reynolds

Voor technische berekeningen moet rekening worden gehouden met het drukverlies, dat optreedt in leidingen en dit drukverlies is afhankelijk van:

de viscositeit η (Pa·s)
de lengte L (m)
de snelheid v (m/s)
de diameter D (m)
de dichtheid ρ (kg/m³)
het laminair of turbulent zijn van de stroming

In de volgende hoofdstukken wordt hier nader op ingegaan, maar hier worden alvast zonder afleidingen enkele formules gegeven. Het drukverlies Δp over een leiding is:

$$\Delta p = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{gem}^2 \quad (2.06)$$

waarin: f de buisweerstandsfactor is.

Er geldt dat indien:

- $Re < 2\,000$, de stroming in een buis laminair is;
- $2\,000 < Re < 4\,000$, de stroming afhankelijk van mate van verstoringen laminair of turbulent is;
- $Re > 4\,000$, de stroming turbulent is;

De waarde van de buisweerstandsfactor f is sterk afhankelijk van het getal van Reynolds en er geldt dat voor laminaire stroming de waarde van f te schrijven is als:

$$f = \frac{64}{Re_D} = \frac{64 \cdot \eta}{\rho \cdot D \cdot v_{gem}} \quad (2.07)$$

Voor de omslag van laminaire stroming naar turbulente stroming bij $Re = 4\,000$ geldt dat de buisweerstandsfactor f :

- Voor laminaire stroming $f = 0,016$
- Voor turbulente stroming $f = 0,04$ (voor een zeer gladde wand)

Er is dus voor turbulente stroming een drukverschil nodig dat 2,5 maal zo groot is als voor laminaire stroming. Het bovenstaande geldt alleen als de relatieve wandruwheid erg laag is. De wandruwheid k wordt uitgedrukt in millimeters en voor een verhouding $k/D < 10^{-6}$ geldt de bovenstaande waarde voor f .

Het grote voordeel van turbulente stroming is de veel hogere **warmte-overdracht** die voor turbulente stroming bijna rechtevenredig is met het kengetal van Reynolds. In warmtewisselaars, zoals in gasgeisers, is het vanwege de compactheid veel gunstiger om de stroming van het water en het gas turbulent te laten zijn dan laminair, omdat dit tot veel grotere afmetingen van de geisers zou leiden. In dit college worden methoden behandeld om het drukverschil in apparaten, waarin warmte-overdracht plaats vindt te minimaliseren en de warmte-overdracht te maximaliseren. Dit zal in de colleges worden toegelicht aan een aantal berekeningen aan een zonnecollector en de verwarming van tapwater.

Rekenvoorbeeld 2.c:

In een leiding stroomt een vloeistof ten gevolge van een drukverschil over de leiding.

Gegeven:	dynamische viscositeit	η	=	0,1	Pa·s
	soortelijke massa van het fluïdum:	ρ	=	1 000	kg/m ³
	binnendiameter:	d	=	50	mm
	lengte v.d. leiding	L	=	100	m
	gemiddelde snelheid:	v_{gem}	=	2	m/s

Gevraagd: *Bereken het drukverschil Δp over de leiding.*

- Oplossing:**
- Het getal van Reynolds: $Re = (d \cdot \rho \cdot v_{gem}) / \eta = (2 \cdot 1000 \cdot 0,05) / 0,1 = 1000$
 - drukverschil:

$$\Delta p = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{gem}^2 = \frac{64}{1000} \cdot \frac{100}{0,05} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 2^2 = 0,256 \text{ MPa}$$

2.6 Samenvatting

Een **continuüm** heeft de eigenschap dat de relevante grootheden **continu** veranderen
Een **fluidum** is een *continuüm* met de eigenschap dat in rusttoestand alleen drukspanningen aanwezig kunnen zijn.

De **hechtvoorwaarde** betekent dat ieder fluidum zich *aan de wand hecht*, dat wil zeggen dat de snelheid van de aan de wand grenzende fluidumdeeltjes gelijk is aan de snelheid van de wand.
De **afschuifsnelheid (shear rate)** is de snelheid waarmee de vloeistoflagen t.o.v. elkaar bewegen en deze wordt met γ^\bullet of met du/dy , aangeduid.

De **dynamische viscositeit** η is de verhouding tussen de optredende schuifspanning en de snelheidsgradiënt:

$$\eta = \tau / \frac{du}{dy} = \tau / \gamma^\bullet$$

Bij gassen neemt de dynamische viscositeit toe bij een oplopende temperatuur;
Bij vloeistoffen neemt de dynamische viscositeit juist af met de temperatuur.
Bij polymeren smelten neemt de dynamische viscositeit sterk af met de temperatuur en de afschuifsnelheid.

De **kinematische viscositeit** ν is gedefinieerd als:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

een **laminaire stroming** kan worden voorgesteld als een **uit lagen opgebouwde stroming** en heeft een stationaire snelheidsverdeling
een **turbulente stroming** kan worden voorgesteld als een **wervelende stroming** en heeft geen stationaire snelheidsverdeling, alleen de gemiddelde waarde van de snelheid is bekend;

Een **kengetal** is een dimensieloos getal, verkregen uit fysische grootheden en afmetingen.

Het kengetal van Reynolds voor een buisstroming is een combinatie van de buisdiameter D , de fluidum-eigenschappen ρ en η en de gemiddelde snelheid v_{gem} .

$$Re_D = \frac{\rho \cdot v_{gem} \cdot D}{\eta}$$

voor **lage** waarden van Re_D ($Re_D < 2\,000$) is een buisstroming **laminair**;
voor **hoge** waarden van Re_D ($Re_D > 4\,000$) is een buisstroming **turbulent**.
Het drukverlies Δp over een leiding is:

$$\Delta p = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{gem}^2$$

waarbij de buisweerstandsfactor f afhankelijk is van het getal van Reynolds en de ruwheid van de buis.

De warmte-overdracht is bij een laminaire stroming laag en bij een turbulente stroming vrijwel rechtevenredig met het kengetal van Reynolds.

2.7 Oefenopgaven

Belangrijk:

Zet altijd de technische eenheden om in MKS-eenheden, anders kan het antwoord onzinnig zijn. Controleer bovendien altijd het antwoord op onzinnigheden.

2.7.1 Krachten benodigd voor het langs elkaar bewegen van vlakke platen

Twee evenwijdige platen zijn op afstand $h = 1$ mm van elkaar gepositioneerd en hiertussen bevindt zich een Newtonse vloeistof. De bovenste plaat met oppervlakte $A = 0.01$ m² beweegt met een snelheid $U = 1$ m/s ten opzichte van de onderste plaat.

Gegeven:

De te gebruiken waarden voor de dynamische viscositeit zijn:

lucht van 20°C:	$\eta = 1.8 \cdot 10^{-5} \cdot \text{Pa} \cdot \text{s}$
water van 20°C:	$\eta = 1.0 \cdot 10^{-3} \cdot \text{Pa} \cdot \text{s}$
motorolie van 20°C:	$\eta = 1.0 \cdot 10^0 \cdot \text{Pa} \cdot \text{s}$

Gevraagd:

Bereken de schuifspanning τ en de benodigde kracht voor het bewegen van de bovenste plaat voor de gegeven stoffen.

2.7.2 Drukverschil over een leiding

Bereken het drukverschil over een ronde leiding met de onderstaande gegevens:

Gegeven:

dynamische viscositeit:	η	=	0,1	Pa·s
soortelijke massa van het fluïdum:	ρ	=	1 000	kg/m ³
binnendiameter:	d	=	50	mm
lengte v.d. leiding:	L	=	100	m
gemiddelde snelheid:	v_{gem}	=	8	m/s

Gevraagd:

Bereken het drukverschil Δp over de leiding.

3 Balansen en wrijvingsloze stromingen

In dit hoofdstuk worden de onderstaande **onderwerpen** behandeld:

Controleoppervlak;

Stroomlijn;

Volumestroom Φ_v en massastroom Φ_m ;

Massabalans, de wet van behoud van massa;

Energiebalans, de wet van behoud van energie;

De wet van Bernoulli, een speciale toepassing van de energiebalans geldig langs stroomlijnen.

3.1 Volumestroom en massastroom

In de massa- en de energiebalans wordt gebruik gemaakt van de volumestroom en de massastroom.

De **volumestroom Φ_v** is gedefinieerd als:

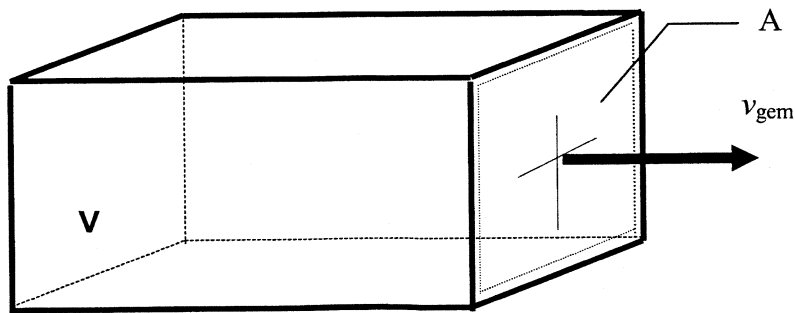
Het volume V dat per tijdseenheid door een oppervlak A stroomt, in formulevorm:

$$\Phi_v(A, v) = A \cdot v_{gem} \quad (3.01)$$

Waarin A de oppervlakte, ook wel **controleoppervlak** genoemd, is waardoor het fluïdum stroomt en v_{gem} de gemiddelde snelheid van het fluïdum is. Het oppervlak A staat loodrecht op de stroming wat in figuur 3.01 is geïllustreerd.

Een **controleoppervlak** is gedefinieerd als:

Een begrensde oppervlak dat een volume volledig omsluit.



Figuur 3.01 *Volume V dat in een gespecificeerde tijd door oppervlakte A is gestroomd.*

Rekenvoorbeeld 3.a

gegeven: Door het oppervlak $A = 0,001 \text{ m}^2$;
stroomt een fluïdum met een stroomsnelheid $v = 0,5 \text{ m/s}$

gevraagd: De volumestroom door A
Het volume V dat na 5 seconden uit het oppervlak A is gestroomd

oplossing: volumestroom: $\Phi_V = 0,001 \cdot 0,5 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$
volume: $V = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 5 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

De **massastroom** Φ_m is gedefinieerd als:

de massa m die per tijdseenheid door een oppervlak A stroomt en in **formulevorm:**

$$\Phi_m(A, v, \rho) = A \cdot v \cdot \rho \quad \text{of} \quad \Phi_m(A, v, \rho) = \Phi_v(A, v) \cdot \rho \quad (3.02)$$

Rekenvoorbeeld 3.b

gegeven: oppervlak: $A = 0,001 \text{ m}^2$;
stroomsnelheid: $v = 0,5 \text{ m/s}$;
soortelijke massa: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

gevraagd: de massastroom Φ_m

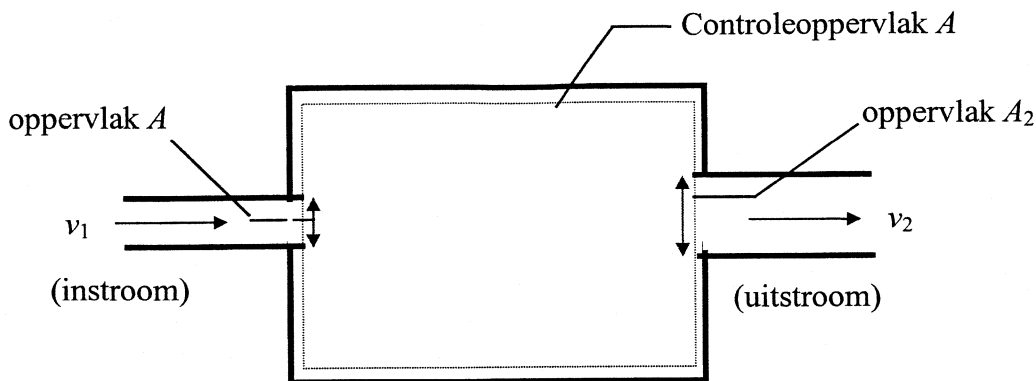
oplossing: $\Phi_m = 0,001 \cdot 0,5 \cdot 1000 = 0,5 \text{ kg/s}$

3.2 De massabalans

De **massabalans** is gedefinieerd als:

Per tijdseenheid moet de netto uit een controlevolume stromende massa gelijk zijn aan de vermindering van massa binnen het controlevolume.

In figuur 3.02 is een volume afgebeeld dat omgeven is met een zogenaamd controleoppervlak A . Door dit oppervlak kan op sommige plaatsen massatransport optreden.



Figuur 3.02 Vat met 1 instroomopening en 1 uitstroomopening

Er moet volgens de massabalans gelden dat:

$$\sum_i \text{massa uitstroom} - \sum_i \text{massa instroom} = \text{afname van de massa binnen } A \quad (3.03)$$

Bekijken we de massa uitstroom per tijdseenheid Φ_m , dan vinden we:

$$\Phi_m = \sum_i \rho_i \cdot \Phi_{V,i} = \sum_i \rho_i \cdot A_i \cdot v_i = \frac{d m_V}{d t} \quad (3.04)$$

De term m_V staat voor de massa in V , binnen het controleoppervlak. Hierbij is de massa uitstroom gelijk aan het product van dichtheid ρ en volume uitstroom Φ_V . Deze laatste is weer gelijk aan het dwarsoppervlak A_i maal de snelheid v_i (**naar buiten is positief**). Let op dat A_i en v_i **loodrecht** op elkaar staan.

Als we nu de dichtheid constant denken en we ons bedenken dat het controleoppervlak ook constant is dan zien we dat de massa van V niet varieert. Ook als de stroming stationair is, geldt dit. De massa instroom is dan gelijk aan de massa uitstroom. De aanname dat de dichtheid constant is, geldt met name voor vloeistoffen en voor lucht bij weinig variërende drukken.

Rekenvoorbeeld 3.c:**Gegeven:** Een verdeelstuk met twee instroomopeningen en één uitstroomopening.De oppervlakten van de openingen: A_{i1} en A_{i2} en van de uitstroomopening A_u ,

dichtheid:

$$\rho = 500 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{oppervlakten ingaande stromen } A_i: A_{i1} = 0,05 \text{ m}^2; \quad A_{i2} = 0,1 \text{ m}^2$$

$$\text{snelheden ingaande stromen } v_i: v_{i1} = 2 \text{ m/s}; \quad v_{i2} = 3 \text{ m/s}$$

$$\text{oppervlakte uitgaande stroom } A_u: A_u = 0,04 \text{ m}^2$$

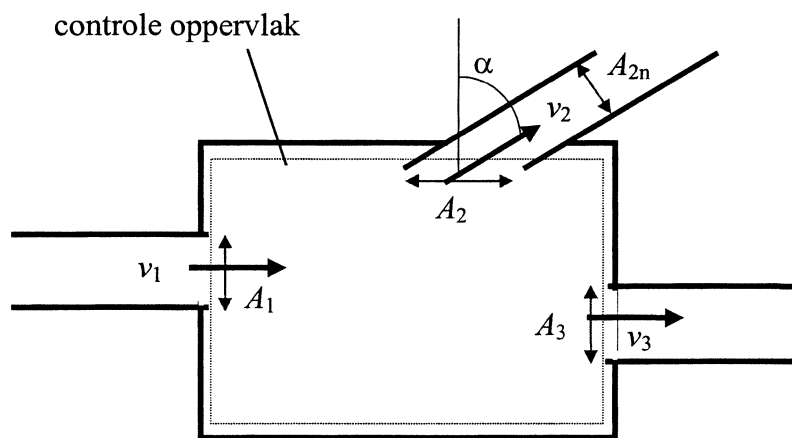
Gevraagd: de snelheid v_u van de uitgaande stroom.

Oplossing:
$$\Phi_u = \Phi_m(A_{i1}, v_{i1}, \rho) + \Phi_m(A_{i2}, v_{i2}, \rho) = 400 \text{ kg/s}$$

$$v_u = \frac{\Phi_u}{A_u \rho} = 10 \text{ m/s}$$

Rekenvoorbeeld 3.d:

Zie figuur 3.03, het controleoppervlak is omgeven door een streeplijn, bij A_1 stroomt het fluïdum het controleoppervlak binnen, bij A_2 en A_3 stroomt het fluïdum er weer uit. De stroming is stationair, de snelheden zijn homogeen over de pijpdoorsnee verdeeld.

**Figuur 3.03** Verdeelstuk met 1 instroomopening en twee uitstroomopeningen

Aangezien de massastroom naar binnen gelijk is aan de massastroom naar buiten geldt:

$$-\rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 + \rho_2 \cdot v_2 \cdot \cos \alpha \cdot A_2 + \rho_3 \cdot v_3 \cdot A_3 = 0 \quad (3.05)$$

Bedenkend dat voor de loodrechte doorsnee van pijp 2 geldt:

$$A_{2n} = A_2 \cdot \cos \alpha \quad (3.06)$$

is het voorgaande ook te schrijven als:

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_{2n} + \rho_3 v_3 A_3 \quad (3.07)$$

3.3 De energiebalans

De energiebalans staat ook wel bekend als de eerste hoofdwet van de thermodynamica voor een open systeem, die berust op de ervaring dat de energie behouden moet blijven.

De **energiebalans** wordt als volgt gedefinieerd:

De aan een open systeem toegevoerde energie per tijdseenheid moet gelijk zijn aan de netto uitstroming van energie uit het systeem plus de toename van energie binnen het systeem plus de door het systeem verrichte arbeid.

De onderstaande uitdrukkingen voor energie en vermogen zijn belangrijk:

Energie W (work) is kracht maal weg (**kracht parallel aan weg**)

$$W = F \cdot s \quad (3.08)$$

per tijdseenheid levert dit **vermogen P** (power) en dit is **kracht F × snelheid v**

$$P = F \cdot v \quad (3.09)$$

Vermogen P en **arbeid W** zijn ook te berekenen met

$$P = \Phi_v \cdot \Delta p$$

$$W = P \cdot t$$

de **kinetische of bewegingsenergie**:

$$U_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (3.10)$$

De **potentiële energie** U_{pot} :

$$U_{pot} = m \cdot g \cdot z \quad (3.11)$$

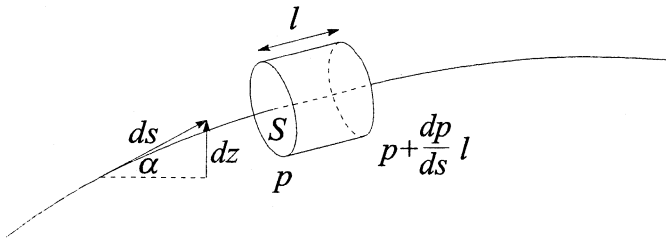
De **inwendige energie** (thermisch):

$$U_{inw} = c \cdot m \cdot T \quad (3.12)$$

waarin: c – soortelijke warmte (J/kg); m – massa (kg); T – absolute temperatuur (K)

3.4 De wet van Bernoulli

De wet van Bernoulli leiden we af met behulp van $F = m \cdot a$.



Figuur 3.04 *Krachtenevenwicht op een cilinder op de stroomlijn*

We bekijken nu een cilinder fluïdum (zie figuur 3.04) dat zich langs een stroomlijn verplaatst.

Een **stroomlijn** is gedefinieerd als:

Een stroomlijn is de weg die de deeltjes in een laminaire stroming in een fluïdum afleggen. Indien er een versmalling in de stroming wordt gecreëerd, komen de stroomlijnen dichter bij elkaar te liggen.

Als we de deeltjes volgen dan geldt dat de versnelling van deze deeltjes het product is van massa en kracht. Gaan we ervan uit dat de stroming stationair is, dan is de versnelling het gevolg van dat een deeltje zich even later op een andere plek in de stroming bevindt. In deze andere plek kan een andere snelheid heersen zodat het deeltje een versnelling heeft ondergaan. Deze versnelling is het product van de plaatselijke deeltjessnelheid (de snelheid waarmee het deeltje naar een andere plek gaat) en de mate waarin de snelheid verandert als functie van de plaats (zie na tweede “=” teken):

$$a = \frac{Dv}{Dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{d(\frac{1}{2}v^2)}{ds} \quad (3.13)$$

Dit is de kracht per massa eenheid (F/m). De kracht per volume-eenheid moet dan gelijk zijn aan:

$$\boxed{} \quad (3.14)$$

Deze kracht kan geleverd worden door de zwaarte kracht:

$$-\frac{m}{V} \cdot g \cdot \sin \alpha = -\rho \cdot g \cdot \frac{dz}{ds} \quad (3.15)$$

en door de drukkrachten:

$$\frac{p \cdot S}{V} - \frac{\left(p + \frac{dp}{ds} l\right) \cdot S}{V} = -\frac{dp}{ds} \quad (3.16)$$

Hierbij is er dus vanuit gegaan dat er alleen drukkrachten op het cilindertje werken. Dit houdt in dat het medium wrijvingsloos moet zijn.

Combinatie van bovenstaande vergelijkingen levert dat langs een stroomlijn moet gelden:

$$-\frac{dp}{ds} - \rho \cdot g \cdot \frac{dz}{ds} = \rho \cdot \frac{d \frac{1}{2} v^2}{ds} \quad (3.17)$$

Indien de dichtheid als constant mag worden beschouwd, als het medium dus incompressibel is, dan mag de dichtheid ρ binnen het d/ds teken gebracht worden:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p \right) = 0 \quad (3.18)$$

en geldt er dus langs een stroomlijn dat:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot z + p = \text{constant} \quad (3.19)$$

De wet van Bernoulli kan ook met de wet van behoud van energie bewezen worden. Het bewijs staat op deze manier vermeld in "Fundamentals of Physics" op pagina 459. De termen van kinetische en potentiële energie zijn dan ook duidelijk te herkennen.

Opmerkingen:

De wet van Bernoulli in de vorm van formule (3.19) is afgeleid onder de volgende condities:

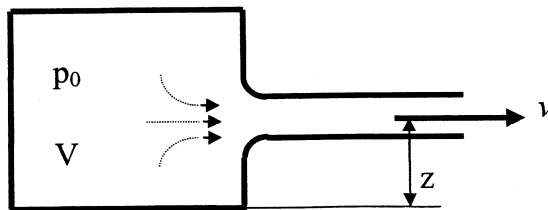
het fluïdum is wrijvingsloos en incompressibel

de stroming is stationair

behalve de zwaartekracht werkt er geen uitwendige kracht op de stroomlijn, zoals bijvoorbeeld wel het geval is bij stroomlijnen die het vlak van een draaiende schroef doorsnijden.

Voor gassen geldt dat: $\rho \cdot g \cdot z \ll \rho \cdot v^2$ en formule (3.19) kan dan geschreven worden als:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constant} \quad (3.20)$$



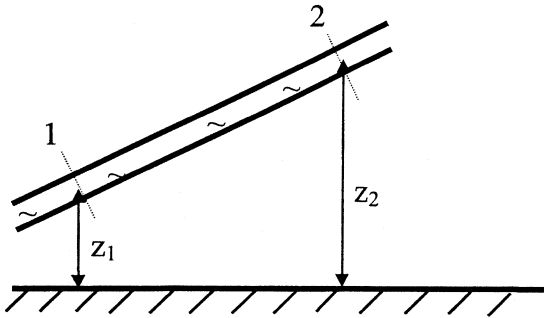
Figuur 3.05 Groot volume V waarin alle stroomlijnen ontspringen

In principe heeft de constante in formule (3.20) niet dezelfde waarde voor verschillende stroomlijnen. In de praktijk zal de waarde in het stromingsveld echter veelal wel eender zijn, zoals bij het veel voorkomende geval dat alle stroomlijnen ontspringen in een grote ruimte waar de fluïdumdeeltjes vrijwel in rust zijn met druk p_0 . Dan moet voor alle stroomlijnen gelden (fig. 3.05):

$$p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot z = p_0 + \rho \cdot g \cdot z = \text{constant binnen } V \quad (3.21)$$

3.5 Stationaire en incompressibele stromingen

In figuur 3.06 is een gedeelte van een buis geschetst die onder een hoek met de horizontaal staat. Het fluïdum hierin is in rust. Daar het fluïdum incompressibel is, is de absolute waarde van de druk niet van belang, het gaat hier om drukverschillen.



Figuur 3.06 *Hydrostatische drukverschillen in een buis*

Tussen de punten 1 en 2 zal een verschil in **hydrostatische druk** zijn:

$$p_{1hydr} - p_{2hydr} = \rho \cdot g \cdot (z_1 - z_2) \quad (3.22)$$

waarin z gemeten wordt ten opzichte van een willekeurig horizontaal vlak. Als het fluïdum nu gaat stromen, zal het drukverschil tussen 1 en 2 een andere waarde $p_1 - p_2$ krijgen. Dit drukverschil bestaat uit de bijdrage van het hydrostatische drukverschil en een drukverschil ten gevolge van de stroming. Voor dit laatste kunnen we schrijven:

$$\Delta p_c = p_{1c} - p_{2c} \quad (3.23)$$

Dan kunnen we voor het totale drukverschil schrijven:

$$p_1 - p_2 = (p_{1hydr} - p_{2hydr}) + (p_{1c} - p_{2c}) = (p_{1hydr} + p_{1c}) - (p_{2hydr} + p_{2c}) \quad (3.24)$$

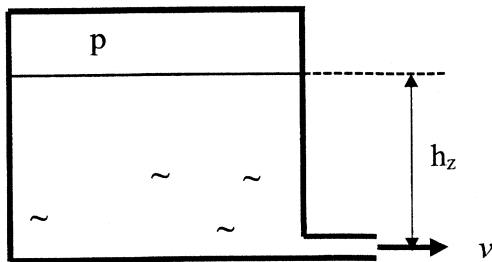
We kunnen dus stellen:

$$p_1 = p_{1hydr} + p_{1c} \quad \text{en} \quad p_2 = p_{2hydr} + p_{2c} \quad (3.25)$$

p_{1c} (het verschil tussen p_1 en p_{1hydr}) noemen we de voor de hoogte gecorrigeerde druk. Het drukverschil $\Delta p_c = p_{1c} - p_{2c}$ is dus uitsluitend een gevolg van de stroming. In de hierna volgende paragrafen wordt dit drukverschil beschouwd dat blijkbaar onafhankelijk is van de helling van de buis en we dus horizontale configuraties kunnen beschouwen. Met formule (3.22) kunnen we zo nodig het hoogteverschil in rekening brengen.

3.6 Toepassingen

3.6.1 Vrije uitstroming uit een vat



Figuur 3.07 Vat met een vrije uitstroming

We gaan uit van een gesloten vat, waarin het vloeistofniveau h is, de dichtheid van de vloeistof ρ , de druk boven de vloeistof is p en waarin zich onder een uitstroomopening bevindt, zie Figuur 3.07. De **potentiële energie** van een volume dV met afmetingen dx , dy en dz dat zich op een hoogte h_z boven de bodem van het vat bevindt, is:

$$E_{pot} = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \rho \cdot g \cdot h_z \quad (3.26)$$

waarbij $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ gelijk is aan ΔV . Bevindt zich boven dat deeltje ook nog een druk p , dan komt dit overeen met een verhoging van het vloeistofniveau van $h_p = p/g \cdot \rho$. De potentiële energie wordt daardoor:

$$E_{pot} = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \rho \cdot g \cdot \left(h_z + \frac{p}{\rho \cdot g} \right) \quad (3.27)$$

De **kinetische energie** van een uitstromende massa Δm is:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v^2 \quad (3.28)$$

Hierin is $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$. Stellen we de kinetische en potentiële energie aan elkaar gelijk, dan krijgen we:

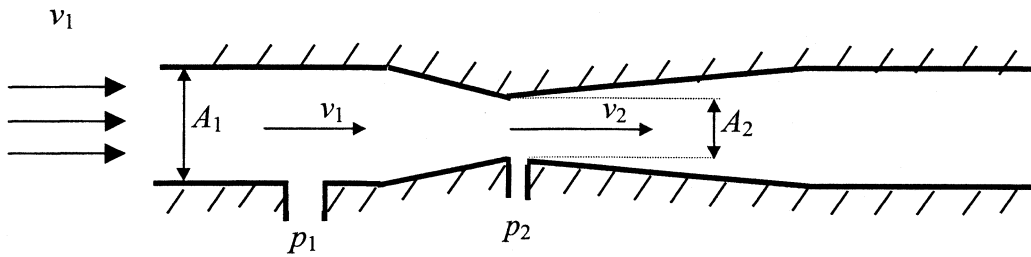
$$\Delta V \cdot \rho \cdot g \cdot \left(h_z + \frac{p}{\rho \cdot g} \right) = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v^2 \quad (3.29)$$

Of wel:

$$\rho \cdot g \cdot h_z + p = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \quad (3.30)$$

3.6.2 De Venturi-buis

In wezen is dit gewoon een vernauwing in een pijp (zie figuur 3.8). Op twee plekken zit een gaatje in de buis, één op een plek voor de vernauwing en één ter plekke van de vernauwing.



Figuur 3.08 *Venturi-buis*

Op deze twee plekken wordt de druk gemeten, respectievelijk p_1 en p_2 . Voor een stationaire stroming van een onsamendrukbaar fluïdum kunnen we, met verwaarlozing van de zwaartekracht, de massabalans hiervoor opstellen:

$$\Phi_m = \rho \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho \cdot v_2 \cdot A_2 \quad (3.31)$$

Tevens is volgens de wet van Bernoulli, er vanuit gaande dat de snelheid homogeen is in de doorsnede:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \quad (3.32)$$

Uit deze twee formules is af te leiden (ga dit zelf na):

$$\Phi_m = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \mu^2}} \sqrt{2\rho \cdot (p_1 - p_2)} \quad (3.33)$$

waarin: $\mu = A_2 / A_1$.

Door meting van $p_1 - p_2$ is dus de massastroom Φ_m te bepalen. Omdat de snelheidsverdeling in de doorsneden A_1 en A_2 in werkelijkheid niet homogeen is vanwege wrijving, moet het rechterlid voor praktische toepassing nog van een experimentele correctiefactor worden voorzien. In de literatuur zijn genormaliseerde afmetingen te vinden met bijbehorende correctiefactoren bijvoorbeeld in het boek "Fluid Mechanics".

3.7 Samenvatting

Als eerste moet gerealiseerd worden dat in de stromingsleer (evenals in de warmteleer) stromen beschouwd worden en geen discrete massa's. Uitgangspunt hierbij is wat (welke fysische grootte) passeert er per tijdseenheid (meestal per seconde) door een controleoppervlak A .

Een **controleoppervlak** is gedefinieerd als:

Een begrensde oppervlak die een volume volledig omsluit.

De **volumestroom** Φ_v is het volume V dat per tijdseenheid door een oppervlak A stroomt.

$$\Phi_v(A, v) = A \cdot v$$

De **massastroom** Φ_m is de massa m die per tijdseenheid door een oppervlak A stroomt.

$$\Phi_m(A, v, \rho) = A \cdot v \cdot \rho \text{ of } \Phi_m(A, v, \rho) = \Phi_v(A, v) \cdot \rho$$

De **massabalans** is:

de ingaande massastromen Φ_{mi} in een controlevolume moeten voor een incompressibel fluidum gelijk zijn aan de uitgaande massastromen $\Sigma \Phi_{mu}$, oftewel:

$$\Sigma \Phi_{mi} = \Sigma \Phi_{mu}$$

De **energiebalans** is gedefinieerd als:

De aan een open systeem toegevoerde energie per tijdseenheid moet gelijk zijn aan de netto uitstroming van energie uit het systeem plus de toename van energie binnen het systeem plus de door het systeem verrichte arbeid.

Wet van Bernoulli: bij ρ is constant en geen wrijving:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot z + p = \text{constant}$$

Een **stroomlijn** wordt als volgt gedefinieerd:

Een stroomlijn is de weg die de deeltjes in een laminaire stroming in een fluidum of gas afleggen. Indien er een vernauwing in de stroming wordt gecreëerd, komen de stroomlijnen dichter bij elkaar te liggen.

3.8 Oefenopgaven

3.8.1 Buis met water en vloeistof

Gegeven:

Door een buis met een doorsnede $A_1 = 0.01 \text{ m}^2$, stroomt water met een dichtheid $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$, met een snelheid $v_1 = 5 \text{ m/s}$. Aan dit water wordt per seconde via een zijbuis 10 kg vloeistof met een dichtheid van $\rho_2 = 800 \text{ kg/m}^3$ toegevoegd.

Gevraagd:

Hoe groot is de snelheid v_3 in m/s, van het mengsel in de buis na toevoeging?

3.8.2 U-buis

Gegeven:

In een U-buis staat water met een soortelijke massa $= 1000 \text{ kg/m}^3$. In één been wordt een laag olie met een soortelijke massa $= 800 \text{ kg/m}^3$, van 5 cm hoogte gegoten.

Gevraagd:

Hoe ver stijgt het wateroppervlak in het andere been?

3.8.3 Vernauwing in een pijp

Gegeven:

Water stroomt door een vernauwing in een horizontale pijp.

Gevraagd:

Wat gebeurt er met de snelheid en de druk ter plekke van de vernauwing?

3.8.4 Venturi-buis

Gegeven:

Oppervlakte buis:	$A_1 = 20 \text{ cm}^2$	oppervlakte vernauwing	$A_2 = 10 \text{ cm}^2$
drukverschil:	$p_1 - p_2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ bar}$	soortelijke massa:	$\rho = 850 \text{ kg/m}^3$

Gevraagd:

De massastroom voor het gemeten drukverschil $p_1 - p_2$

4 Laminaire viskeuze stromingen

In dit hoofdstuk worden de volgende **onderwerpen** behandeld:

- **Couette stroming;**
- vlakke **Poiseuille stroming;**
- **laminaire stroming** in een buis.

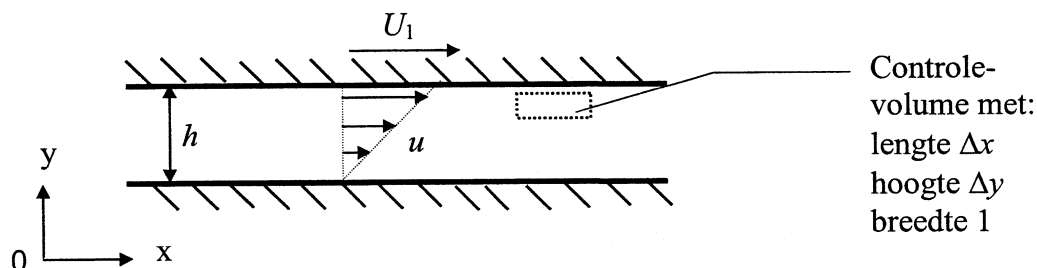
4.1 Couette stroming

De kenmerken van een **Couette stroming** zijn:

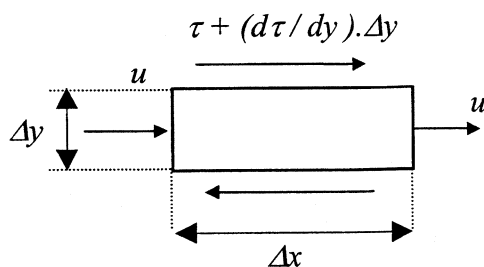
*Een zuivere **Couette stroming** treedt op tussen twee oneindig uitgestrekte evenwijdige wanden waartussen zich een viskeus onsamendrukbaar fluïdum bevindt. De relatieve snelheid tussen de wanden is constant.*

In figuur 4.01 is de doorsnede van twee evenwijdige platen getekend met een relatieve snelheid U_1 . In iedere doorsnede moet de snelheidsverdeling dezelfde zijn, omdat de wanden oneindig uitgestrekt zijn. Praktisch is dit zo als $h \ll l$, waarin l de lengte van de spleet is en de beschouwde doorsnede niet te dicht bij de spleeteinden ligt. De snelheidsprofielen in iedere doorsnede zijn gelijk en alle snelheden zijn evenwijdig aan de x-richting zijn. In de y-richting is de snelheid dus nul, waaruit volgt dat de druk in y-richting constant is. Ook in x-richting moet vanwege de gelijke toestand in iedere doorsnede de druk constant zijn, dus in de gehele spleet geldt dat de druk constant is.

In Figuur 4.01 is in de spleet een controlevolume $\Delta x \cdot \Delta y \cdot l$ geschetst, waarbij voor de breedte loodrecht op het vlak van tekening de eenheid van lengte 1 wordt genomen, zie Figuur 4.02.



Figuur 4.01 Spleet tussen twee evenwijdige platen waartussen een Couette stroming optreedt.



Figuur 4.02 Krachterevenwicht op een controlevolume $\Delta x, \Delta y, l$

Het controlevolume is in rust ten opzichte van de stilstaande wand. De snelheid bij het in- en uittreden van het controlevolume is u . Er is geen verandering van impuls. Zoals we net zagen zijn ook de drukken links en rechts gelijk.

Uit het krachtenevenwicht volgt:

$$\frac{d\tau}{dy} = 0 \quad (4.01)$$

Met formule (2.02) volgt dan:

$$\eta \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad (4.02)$$

Als deze uitdrukking twee keer naar y geïntegreerd wordt, (waarbij de integratieconstanten kunnen worden bepaald aan de hand van twee randvoorwaarden, namelijk $\{u(0) = 0 \text{ en } u(h) = U_1\}$) ontstaat het lineaire snelheidsprofiel:

$$u = \frac{y}{h} \cdot U_1 \quad (4.03)$$

Op het in figuur 4.3 aangegeven controlevolume wordt door de schuifspanning τ per seconde en **per oppervlakte-eenheid een arbeid verricht** ter grootte van:

$$\tau \cdot \frac{du}{dy} \cdot dy \quad (4.04)$$

Volgens de energiebalans zal het fluïdum bij uitstroming uit het controlevolume dus een hogere temperatuur hebben dan bij instroming. Er is door wrijving mechanische arbeid omgezet in warmte, ook wel dissipatie genoemd.

De temperatuurverdeling in een doorsnede hangt echter ook af van de warmtegeleidingseigenschappen van het fluïdum en de warmteoverdracht naar de wanden.

De **Couette stroming wordt turbulent** bij ongeveer

$$Re_h = \frac{U_1 \cdot h \cdot \rho}{\eta} = 20\,000 \quad (4.05)$$

Dit wordt toegeschreven aan de storingen die optreden bij instroming in de spleet. Theoretisch zou de stroming voor iedere waarde van Re_h laminair moeten zijn.

(Pas op! Bij de Couette stroming wordt **niet** de gemiddelde snelheid genomen, maar de **maximale snelheid U_1**).

Het lijkt verwonderlijk dat deze stroming voor zulke hoge waarden van Re niet turbulent wordt. Dit laat zich echter verklaren uit het feit dat de fluïdumdeeltjes geen versnelling hebben; ze bewegen alle eenparig. Er zijn geen versnellingskrachten en Re is in eerste instantie niet een belangrijk kengetal. Het snelheidsprofiel is dan ook onafhankelijk van Re .

Rekenvoorbeeld 4.a:

omschrijving:

Twee vlakke platen worden ten opzichte van elkaar bewogen.
De onderste plaat stil staat en de bovenste plaat wordt voort bewogen.

Gegeven:

Het oppervlak van de plaat: $A = 10\,000 \text{ mm}^2$
spleet tussen de platen: $h = 1 \text{ mm}$
dynamische viscositeit: $\eta = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$
snelheid: $U_1 = 1 \text{ m/s}$

Gevraagd:

de snelheidsgradiënt $\text{grad}(u)$;
de schuifspanning τ ;
de benodigde kracht F om de bovenste plaat t.o.v. de onderste te bewegen.

Oplossing:

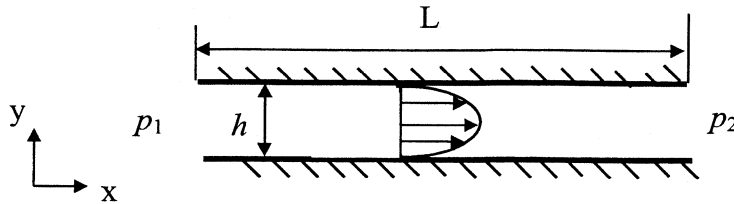
$$\text{grad}(u) = \frac{U_{\text{rand}}}{h} = 1000 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\tau = \eta \cdot \text{grad}(u) = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$F = \tau \cdot A = 10 \text{ N}$$

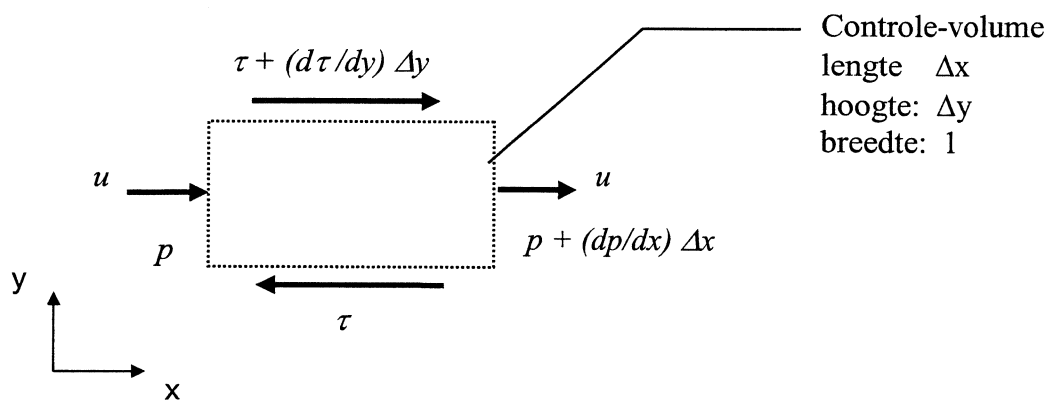
4.2 Vlakke Poiseuille stroming

De vlakke Poiseuille stroming is een stroming in een nauwe spleet ten gevolge van een drukverschil $p_1 - p_2$ over de spleet en het snelheidsverloop is getekend in figuur 4.03.



Figuur 4.03 Verloop van de snelheid over de hoogte bij een vlakke Poiseuille stroming

Alvorens hier verder op in te gaan, wordt eerst de vergelijking voor een stationaire eendimensionale laminaire stroming afgeleid als gevolg van een drukverschil. Beschouw hiertoe figuur 4.04:



Figuur 4.04 Krachten op een controlevolume in een vlakke Poiseuille stroming.

We nemen de x-as evenwijdig aan de stromingsrichting (deze hoeft niet horizontaal te zijn) en beschouwen een klein controlevolume $dx \cdot dy \cdot 1$. Ter plaatse van het voorvlak is de druk: p en ter plaatse van het achtervlak is de druk: $p + (dp/dx)dx$. Bij doorstroming van het controlevolume blijft de snelheid, dus ook de impuls van het fluïdum constant. Dan geldt volgens het krachterevenwicht in de x-richting:

$$\left(\tau + \frac{d\tau}{dy} dy \right) \cdot dx - \tau \cdot dx + p \cdot dy - \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) \cdot dy = 0$$

$$\frac{d\tau}{dy} - \frac{dp}{dx} = 0 \quad (4.06)$$

Als we in- en uitstroomeffecten verwaarlozen, hetgeen toegestaan is als $L \gg h$, kunnen we stellen dat het snelheidsprofiel in iedere doorsnede hetzelfde zal zijn. De drukgradiënt dp/dx zal constant zijn en negatief, omdat p_1 groter is dan p_2 en deze is:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{L} \quad (4.07)$$

Door gebruik te maken van (2.02)

$$\tau = \eta \cdot \frac{du}{dy}$$

en deze te substitueren in de krachtenbalans en twee maal te integreren naar y , komen we tot het volgende resultaat:

$$u = \frac{1}{2\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot y \cdot (h - y) \quad (4.08)$$

De snelheidsverdeling is dus parabolisch en de maximale snelheid treedt op in het midden.

De volumestroom Φ_v is:

$$\Phi_v = b \cdot \int_0^h u \cdot dy = \frac{1}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot b \cdot h^3 \quad \Phi_v = \frac{1}{12 \eta} \frac{\Delta p}{L} \cdot b \cdot h^3 \quad (4.09)$$

De gemiddelde snelheid u_{gem} :

$$u_{gem} = \frac{\Phi_v}{b \cdot h} \quad (4.10)$$

Voor het drukverschil Δp geldt:

$$\Delta p = 12 \cdot \eta \cdot \frac{L}{h^2} \cdot u_{gem} \quad (4.11)$$

Opmerkingen:

- De vlakke Poiseuille stroming is theoretisch laminair tot ongeveer $Re_h = 10\,000$. Door storingen bij de instroming wordt in de praktijk voor $Re_h = 2000$ de stroming al turbulent.
- Het drukverschil is sterk afhankelijk van de hoogte van de spleet. Wordt de dikte van de spleet gehalveerd, dan stijgt het benodigde drukverschil met een factor 8 voor dezelfde volumestroom. Dit is vooral bij het spuitgieten van dunwandige producten van belang.

Rekenvoorbeeld 4.b:

Gegeven: *In een spleet stroomt glycerine ten gevolge van een drukverschil over de spleet.*

dynamische viscositeit	$\eta = 1$	Pa·s
soortelijke massa v.d. glycerine	$\rho_g = 900$	kg/m ³
massastroom:	$\Phi_m = 4 \cdot 10^{-3}$	kg/s;
lengte v.d. spleet	$L = 1$	m
hoogte van de spleet	$h = 1$	mm
breedte	$b = 50$	mm

Gevraagd: *Bereken het drukverschil over de spleet.*

Oplossing:

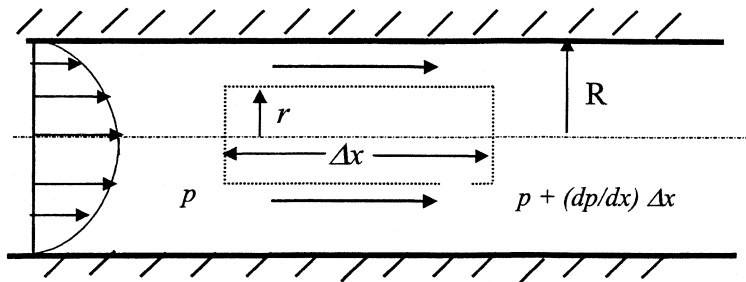
1. volumestroom: $\Phi_v = \frac{\Phi_m}{\rho_g} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{900} = 4,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

2. gemiddelde snelheid: $u_{gem} = \frac{\Phi_v}{b \cdot h} = \frac{4,4 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 8,8 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

3. drukverschil: $\Delta p = 12 \cdot \eta \cdot \frac{L}{h^2} \cdot u_{gem} = 12 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 \cdot 10^{-6}} \cdot 8,8 \cdot 10^{-2} = 1,06 \cdot \text{MPa}$

4.3 Laminaire stroming in een ronde buis

Hier wordt de volledig ontwikkelde stroming beschouwd in een horizontale buis als gevolg van een drukverschil. In figuur 4.05 is als controlevolume een met de buisas centrische cilinder gekozen.



Figuur 4.05 Controlevolume in een horizontale buis

De afleiding is gelijk aan die van de Poiseuille stroming maar nu met een cilindervormig controlevolume. Net als bij de vlakke Poiseuille stroming moet hier weer de impulsbalans opgesteld worden. Deze leidt tot het volgende krachtenevenwicht:

$$p \cdot \pi \cdot r^2 - \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) \cdot \pi \cdot r^2 + \tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dx = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r - \tau = 0 \quad (4.12)$$

Uitschrijven van deze formule en na het integreren naar r, volgt de snelheidsverdeling:

$$v = -\frac{1}{4\eta} (R^2 - r^2) \frac{dp}{dx} \quad (4.13)$$

Uit dit parabolisch snelheidsprofiel kunnen we ook een volumedebiet, een gemiddelde snelheid en een maximale snelheid te bepalen.

De **volumestroom** Φ_v is:

$$\Phi_v = \int_0^R v 2\pi r dr \quad \Phi_v = -\frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{dp}{dx} \quad (4.14)$$

De **gemiddelde snelheid** u_{gem} :

$$u_{gem} = \frac{\Phi_v}{\pi R^2} \quad (4.15)$$

Het benodigde **drukverschil** Δp is:

$$\Delta p = \frac{8 \cdot \eta}{\pi} \cdot \frac{L}{R^4} \cdot \Phi_v = 8 \cdot \eta \cdot \frac{L}{R^2} \cdot v_{gem} \quad (4.16)$$

Voor een **viskeuze stroming** in een horizontale spleet of buis geldt kan het drukverschil geschreven worden als:

$$\Delta p = C \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{gem}^2 \quad (4.17)$$

, waarin v_{gem} de gemiddelde snelheid is en C een functie van de viscositeit en de afmeting is.

Het drukverlies wordt wel uitgedrukt in een **buisweerstandsfactor f** , die als volgt is gedefinieerd:

$$\Delta p = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{gem}^2 \quad (4.18)$$

Voor een laminaire stroming kan met behulp van formule (4.16) de uitdrukking voor de buisweerstandsfactor f worden gevonden:

$$f = \frac{64 \cdot \eta}{\rho \cdot D \cdot v_{gem}} = \frac{64}{Re_D} \quad (4.19)$$

Normaal gesproken heeft de **ruwheid k** van de buiswand geen invloed op de laminaire stroming, mits deze geen al te grote waarde aanneemt. Als grens is aan te houden:

$$\frac{k}{D} < 1,75 \frac{1}{\sqrt{Re_D}} \quad (4.20)$$

Voor $Re_D = 2\,000$, de stroming is dan zeker nog laminair, geldt voor de verhouding $k/D < 0,04$. Bij normale buizen is hieraan voldaan. Ter illustratie zijn enige waarden voor de ruwheid k :

Tabel 4.01 Waarden voor de wandruwheid van buizen

getrokken buis (glas, messing, aluminium, kunststof):	$k = 0 - 0,0015$ mm
gelaste, stalen buis nieuw:	$k = 0,05 - 0,10$ mm
licht geroeste buis:	$k = 0,15 - 0,20$ mm
buis met sterke aangroeiing:	k tot 3 mm

Opmerkingen:

- De definitie (4.18) voor de buisweerstandsfactor f geldt niet alleen voor een laminaire, maar ook voor een turbulente buisstroming.
- Onder technische omstandigheden is een buisstroming laminair als $Re_D < 2\,000$. Worden er echter voorzorgen genomen voor een storingsvrije stroming, dan kan de stroming laminair blijven tot veel grotere waarden van Re_D .
- Bij experimenten waarbij geen verstoring van de stroming (wervels) optreedt, kan laminaire stroming optreden tot $Re_D = 10^5$.

4.4 Samenvatting

De **Couette stroming** wordt gekenmerkt door:

- de druk is overal in de stroming constant.
- de snelheid van de stroming in de y-richting is nul
- in iedere doorsnede is de snelheidsverdeling in de x-richting hetzelfde: een lineair snelheidsprofiel $u = \frac{y}{h} U_1$
- de Couette stroming wordt **turbulent** bij ongeveer $Re = 20\ 000$. Dit komt doordat de fluïdumdeeltjes eenparig bewegen en er geen versnellingen in de stroming optreden.

De **vlakke Poiseuille stroming** wordt gekenmerkt door:

- de stroming ontstaat in een nauwe spleet door een drukverschil $\Delta p = p_1 - p_2$ over de spleet.
- het snelheidsprofiel in iedere doorsnede is hetzelfde: parabolisch, waarbij de maximale snelheid wordt behaald in het midden. Aan de randen is de snelheid nul t.g.v. de hechtvoorwaarde.

De **gemiddelde snelheid** u_{gem} :

$$u_{gem} = \frac{\Phi_v}{b \cdot h}$$

Voor het **drukverschil** Δp geldt:

$$\Delta p = 12\eta \cdot \frac{L}{h^2} \cdot u_{gem}$$

De vlakke Poiseuille stroming wordt theoretisch turbulent bij $Re = 10\ 000$. Ook hier bewegen fluïdumdeeltjes éénparig en is de stroming in eerste instantie onafhankelijk van Re .

De **laminaire stroming** in een **ronde buis**:

De gemiddelde snelheid

$$u_{gem} = \frac{\Phi_v}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2}$$

de drukverschil Δp :

$$\Delta p = \frac{8 \cdot \eta}{\pi} \cdot \frac{L}{R^4} \cdot \Phi_v$$

het drukverlies per eenheid van buislengte wordt uitgedrukt in een buisweerstandsfactor f .

de **buisweerstandsfactor** f is:

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

het drukverlies Δp kan geschreven worden als:

$$\Delta p = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{gem}^2$$

de ruwheid k van de buiswand heeft geen invloed op de laminaire stroming, mits deze geen al te grote waarden ($k < 0,1$ mm) aanneemt.

4.5 Opgaven

4.5.1 Meten van de viscositeit van een vloeistof

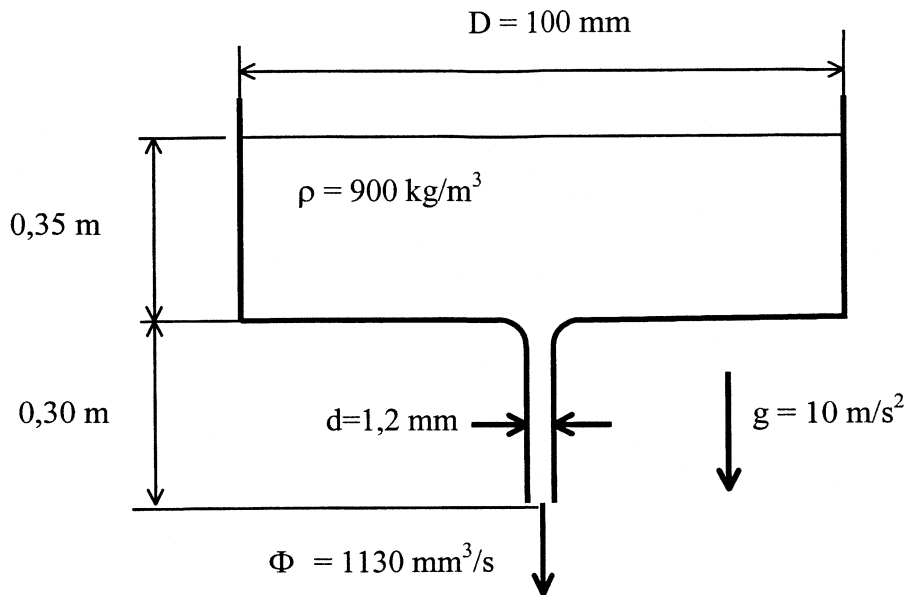
Gegeven:

Een vat met een vloeistof, waarvan de viscositeit bepaald moet worden.

De stroming in het vat is als wrijvingsloos te beschouwen.

De waarde van de viscositeit η wordt bepaald uit de stroming in het capillair.

De versnelling van de zwaartekracht $g = 10 \text{ m/s}^2$



Figuur 4.06 vat met vloeistof

Gevraagd:

Bereken de gemiddelde uitstroomsnelheid

Bereken het drukverschil over het capillair

De viscositeit η van de vloeistof

4.5.2 Poiseuille stroming in een spleet

Water van 20°C wordt door een spleet geperst.

Gegevens:

spleethoogte: $h = 2 \text{ mm}$

breedte: $b = 90 \text{ mm}$

drukverschil: $\Delta p = -13,5 \text{ Pa}$

spleetlengte $L = 90 \text{ mm}$

soortelijke massa $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

dynamische viscositeit $\eta = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Gevraagd:

Teken het verloop van de snelheid als functie van y

Bereken de buisweerstandsfactor f

4.5.3 Water en vloeibare kunststof door een buis

Gegeven:

De dynamische viscositeit η van water bij een bepaalde temperatuur: $\eta = 10^{-3}$ Pa·s
De buis, waardoor het water stroomt heeft een diameter $D = 10$ mm.

Gevraagd:

Hoe groot is de maximale snelheid van het water als de drukgradiënt $(\Delta p/L) = 10^{-3}$ N/m³?
Als er in plaats van water een vloeibare kunststof door deze buis gestuwd wordt met een dynamische viscositeit van $2 \cdot 10$ Pa·s. Hoe groot moet de benodigde drukgradiënt zijn om dezelfde maximale snelheid te bereiken?

4.5.4 Laminaire stroming door een ronde buis

Gegeven:

Door een ronde buis moet 720 liter water per uur worden verpompt. De doorsnede van de buis is $D = 150$ mm; de lengte $L = 2000$ m en de viscositeit $\eta = 1 \cdot 10^3$ Pa · s

Gevraagd:

De gemiddelde snelheid van het water.
Het kengetal van Reynolds.
Het benodigde drukverlies Δp .

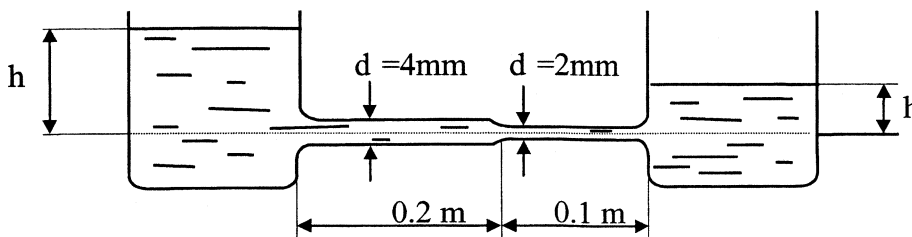
4.5.5 Oliereservoirs

Toelichting: Twee wijde, open oliereservoirs zijn verbonden door middel van een leiding, zoals aangegeven in figuur 3.12. Ten gevolge van het niveauverschil stroomt door de leiding olie, waarbij verondersteld mag worden, dat in de reservoirs de wrijving geen rol speelt, en in de leiding over de volle lengte sprake is van een volledig ontwikkelde viskeuze stroming.

Gegeven: dynamische viscositeit: $\eta_{\text{olie}} = 0,5$ Pa·s
dichtheid: $\rho = 800$ kg/m³
volumedebiet: $\Phi_V = 0,452$ liter/h

Gevraagd:

Bereken het hoogteverschil tussen de vloeistofniveau's in de beide reservoirs.
barometerstand : 1000 mbar



Figuur 4.07 Twee reservoirs met een verbinding

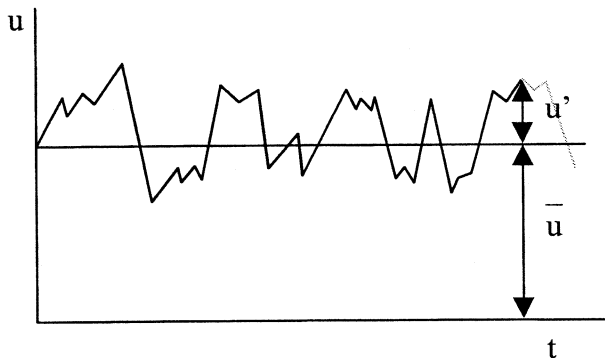
5 Turbulente stromingen

In dit hoofdstuk worden de onderstaande onderwerpen behandeld:

- turbulentie
- turbulente stromingen
- ontstaan van turbulentie

5.1 Het begrip turbulentie

Zoals we zagen wordt voor waarden van $Re_D > 2.000$ onder technische omstandigheden een buisstroming turbulent. Meten we in een vast punt de snelheid in de richting van de buisas als functie van de tijd, dan krijgen we een beeld als geschetst in figuur 5.01.



Figuur 5.01 Verloop van de snelheid als functie van de tijd voor een turbulente stroming.

Als een buisstroming stationair is, heeft de stroming de gemiddelde snelheid \bar{u} , die constant is als we de middeling over een voldoende groot tijdinterval nemen. We kunnen dan definiëren:

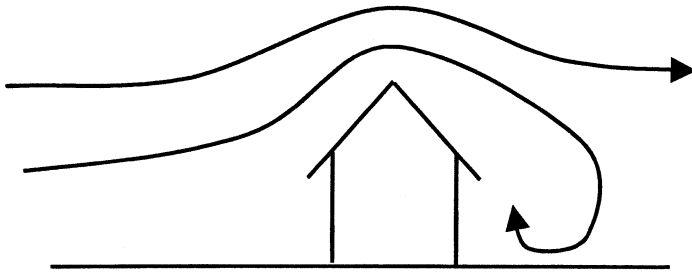
$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (5.01)$$

De grootte van het tijdsinterval T is afhankelijk van het beschouwde stromingsinterval. Bij een buisstroming zal de middelingstijd in de orde van 10 seconden zijn, bij een vrije straal in de orde van 10 minuten, terwijl bij metingen in de atmosfeer en zee aan nog veel grotere tijden gedacht moet worden. Dit hangt samen met de afmetingen van de grootste wervels die in de stroming voorkomen.

We kunnen een turbulente stroming beschouwen als een stroming met een gemiddelde snelheid \bar{u} , waarin wervels van verschillende afmetingen en oriëntatie op min of meer willekeurige wijze voorkomen en meegevoerd worden. Turbulentie is daarom altijd driedimensionaal, ook al is de stromingsconfiguratie tweedimensionaal, zoals bijvoorbeeld bij een turbulente stroming in een buis.

De grootste wervels zullen afmetingen hebben in de orde van de grootste afmetingen van het systeem. Bij een buisstroming zal dit de buisdiameter zijn, bij stroming om gebouwen de hoogte van de bebouwing. Deze grote wervels veroorzaken een intensieve menging van het fluïdum en de daarmee samenhangende grootheden als impuls, warmte en concentratie. Dit is ook de reden dat bij de in paragraaf 2.4 genoemde proef bij turbulent geworden stromingen een snelle menging van de kleurstof met het fluïdum plaatsvindt.

Bij laminaire stroming vindt menging plaats door moleculaire diffusie, bij turbulente stroming door werveldiffusie en dat gaat veel sneller. De afmetingen van de kleinst voorkomende wervels worden bepaald door de dissipatie. Zijn er in een stromingsveld veel kleine wervels, dan kunnen tussen de wervels grote snelheidsgradiënten, en daarmee samenhangend grote schuifspanningen optreden, waardoor de kinetische energie door viskeuze wrijving wordt omgezet in warmte. In turbulente stromingen moeten dus steeds nieuwe wervels gegenereerd worden om de turbulentie in stand te houden, denk bijvoorbeeld aan het ontstaan van grootschalige wervels bij omstroming van het gebouw, zie figuur 5.02.



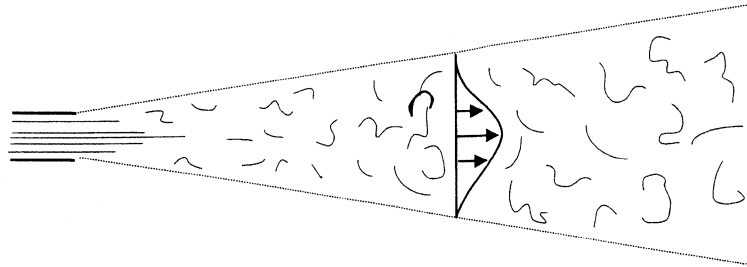
Figuur 5.02 *Ontstaan van grootschalige wervels bij omstroming van een gebouw.*

Het zal duidelijk zijn dat de processen die in een turbulente stroming plaatsvinden moeilijk, zo niet onmogelijk, deterministisch te beschrijven zijn. Daarom worden hiervoor statistische methoden gebruikt, waar we hier niet verder op ingaan. Toch zijn in bepaalde turbulente stromingen wervelpatronen gevonden die zich in de tijd min of meer regelmatig herhalen. We spreken dan van "coherente structuren". Deze zijn tegenwoordig een belangrijk onderwerp van onderzoek.

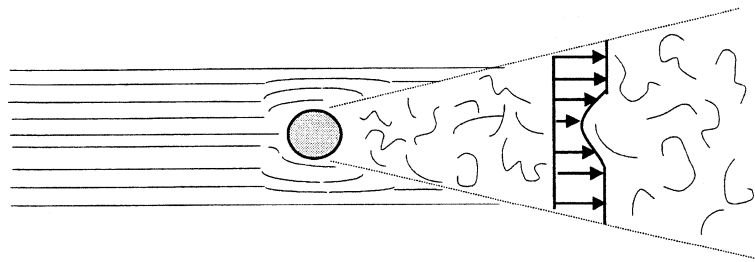
5.2 Turbulente stromingen

We onderscheiden twee groepen turbulente stromingen:

Vrije turbulente stromingen waarbij de turbulentie zich in het stromingsveld ongestoord kan ontwikkelen. Er wordt stroomafwaarts geen energie meer toegevoerd en de turbulentie zal dus stroomafwaarts uitsterven. Voorbeelden van vrije turbulente stromingen zijn de vrije straal (figuur 5.04) en de zogstroming (figuur 5.05).

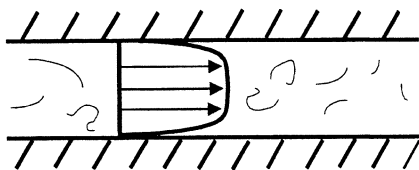


Figuur 5.4 *Vrije straal*

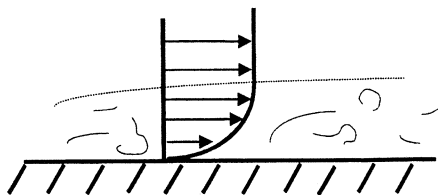


Figuur 5.5 *Zogstroming*

Wandturbulentie, waarbij de stroming wordt begrensd door een vlakke wand, waardoor steeds nieuwe energie aan de turbulentie toegevoerd kan worden. Voorbeelden zijn de buisstroming, zie figuur 5.06 en de stroming langs een wand, de zogenaamde grenslaagstroming.



Figuur 5.06 *Wandturbulentie in een buisstroming.*

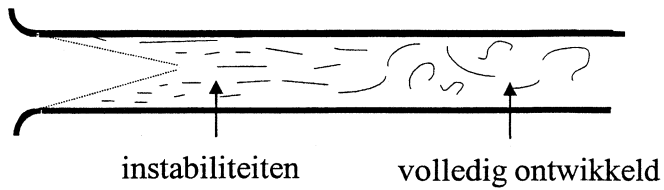


Figuur 5.07 *Wandturbulentie aan een vlakke wand*

Bij de buisstroming voeren we energie toe aan de stroming door over de buis een drukverschil te handhaven. Deze energie wordt grotendeels omgezet in kinetische energie van de turbulentie en tenslotte in warmte. Hoe dit alles precies in zijn werk gaat, is tot op heden nog onduidelijk.

5.3 Ontstaan van turbulentie

Dikwijls ontstaat turbulentie als gevolg van het instabiel worden van een laminaire stroming. Bij een buisstroming zal ook bij een grote waarde van Re de stroming in het begin van de pijp nog laminair zijn. Langs de wand zal zich een grenslaag opbouwen die verder stroomafwaarts de hele buis vult. In deze laminaire buisstroming kunnen nu instabiliteiten optreden waardoor wervels ontstaan en de stroming tenslotte turbulent wordt, zie figuur 5.08.



Figuur 5.08 *Ontstaan van turbulentie*

Nog verder stroomafwaarts zal de buisstroming tenslotte volledig ontwikkeld turbulent zijn, dat wil zeggen de tijdgemiddelde snelheidsverdelingen zijn in iedere doorsnede gelijk.

5.4 Samenvatting

Turbulente stromingen kunnen beschouwd worden als een stroming met gemiddelde snelheid \bar{u} waarin wervels van verschillende afmetingen en oriëntatie op min of meer willekeurige wijze voorkomen en meegevoerd worden.

Bij turbulente stromingen vindt menging van het fluïdum plaats door wervel diffusie en dat gaat veel sneller dan bij laminaire stromingen, waarbij menging ontstaat door moleculaire diffusie.

Turbulente stromingen moeten steeds nieuwe wervels genereren om de turbulentie in stand te houden omdat er door viskeuze wrijving kinetische energie omgezet wordt in warmte. Daarom zal bij vrije turbulente stromingen de turbulentie stroomafwaarts uitsterven omdat er geen energie meer toegevoerd wordt.

6 Laminaire en turbulente stroming door buizen

In dit hoofdstuk worden de volgende **onderwerpen** behandeld:

- **Laminaire en turbulente stroming door buizen;**
- de buisweerstandsfactor f als functie van het kengetal van Reynolds Re ;
- het diagram van Moody;
- instroom- en uitstroomverlies;
- de invloed van appendages op de stromingsweerstand;
- de invloed van bochten op de stromingsweerstand;

6.1 De stromingsweerstand in een rechte buis

6.1.1 De buisweerstandsfactor f

In paragraaf 4.3 is de formule afgeleid voor de buisweerstandsfactor f . Deze formule luidde:

$$\Delta p = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{gem}^2 \quad f = \frac{64}{Re_D} \quad (6.01)$$

Voor de volledig ontwikkelde buisstroming (die dus laminair of turbulent kan zijn) heeft **Moody** uit verzamelde empirische resultaten een diagram opgesteld waarin f afgelezen kan worden als functie van Re_D en k/D (k is de ruwheid van de buiswand). In Figuur 6.01 is dit diagram getoond en er wordt onderscheid gemaakt tussen **drie gebieden**, en wel:

6.1.2 Laminaire stroming: $Re_D < 2\,000$

In dit gebied is f alleen afhankelijk van het kengetal van Reynolds Re_D :

$$f = \frac{64}{Re_D} \quad (6.02)$$

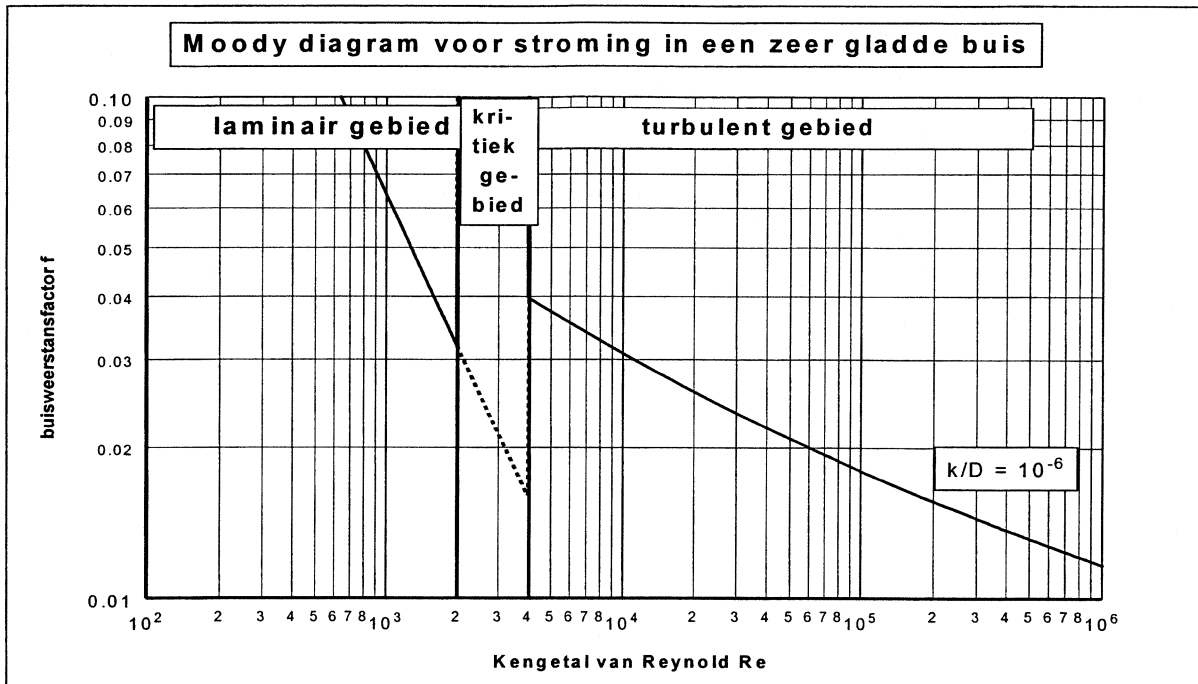
De buisweerstand is onafhankelijk van de wandruwheid. Dit gebied stelt de rechte lijn in het diagram voor. Het drukverlies is in dit gebied evenredig met de eerste macht van de snelheid, zie ook hoofdstuk 4.

6.1.3 Het kritiek gebied: $2\,000 < Re_D < 4\,000$

Bij een goed verzorgde instroming kan de stroming nog laminair zijn. De waarde van f ligt dan op het gestreepte deel van de rechte en formule (6.02) is weer geldig. Is de stroming turbulent, dan is f niet te voorspellen. Deze ligt ergens in het gearceerde gedeelte, afhankelijk van de instroomcondities en de ruwheid van de buiswand.

6.1.4 Het turbulent gebied: $Re_D > 4\ 000$

De stroming is turbulent, maar voor gladde buiswanden $k/D \ll 1$ neemt de stromingsweerstand nog steeds toe met het getal van Reynolds. Hier is f zowel afhankelijk van Re_D als k/D en dit betekent, dat bij een hogere waarde v/h getal van Reynolds de stroming "meer" turbulent wordt.



Figuur 6.01 *Moody diagram voor een zeer gladde buis ($k/D = 10^{-6}$)*

Rekenvoorbeeld 6a:

Gevraagd: Bepaal voor een laminaire stroming, bij een waarde van $Re_D = 4000$, de weerstandsfactor f . Doe hetzelfde voor een turbulente stroming.

Oplossing: Voor een laminaire stroming geldt de formule voor de weerstandsfactor:

$$f = \frac{64}{Re_D} = \frac{64}{4000} = 0,016$$

Bij een turbulente stroming, moet de waarde voor f worden afgelezen uit het diagram van Moody en dit geeft: $f = 0.04$

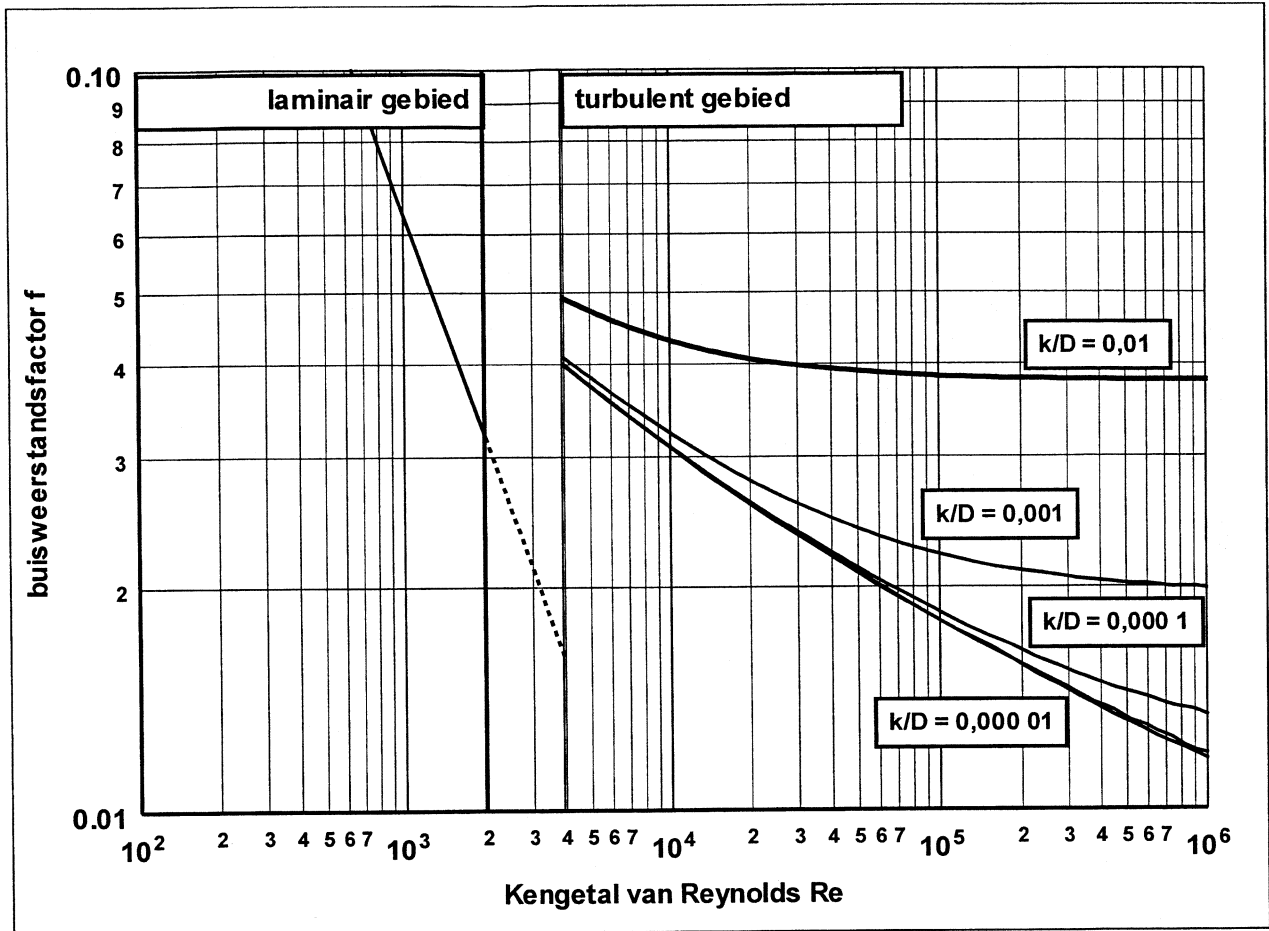
In het Moody diagram is te zien, dat de weerstandsfactor f minstens een factor 2,5 stijgt na de omslag van laminair naar turbulent voor een zeer gladde buis.

Als de ruwheid van een buis toeneemt, dan wordt de weerstandsfactor f hoger, maar boven een bepaalde waarde van Re_D neemt f niet meer toe.

Bij zeer hoge waarden van Re_D neemt f niet meer af bij een toename van Re_D en f is dan alleen nog maar een functie G van k/D . Er geldt dus:

$$\Delta p = \frac{L}{D} \cdot G\left(\frac{k}{D}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{gem}^2 \quad (6.03)$$

Het drukverlies is dus evenredig met het kwadraat van de snelheid. In hoofdstuk 4 zijn enkele richtwaarden gegeven voor de waarden van k . In figuur 6.02 is het Moody diagram voor een aantal relatieve waarden van de buisruwheid gegeven.

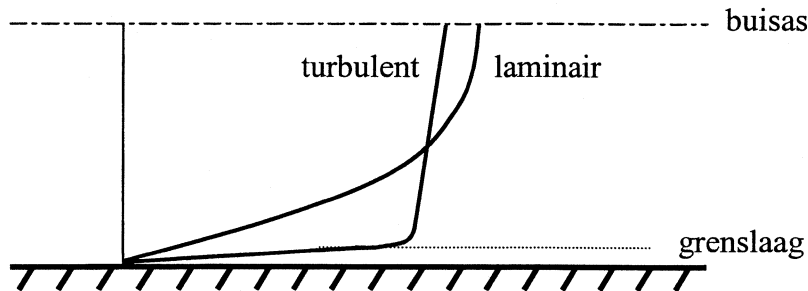


Figuur 6.02 Diagram van Moody voor een aantal relatieve waarden van de buisruwheid

Soort stroming	Interval v/h kengetal van Reynolds Re	
Laminair	$Re < 2000$	de stroming is volledig laminair
kritiek gebied	$2000 < Re < 4000$	de stroming kan laminair zijn en dan kan de lage weerstandsfactor genomen worden of turbulent en dan moet de hoge waarde worden gebruikt;
turbulent	$Re > 4000$	de stroming is turbulent en de lijnen voor $Re > 4000$ met de buisruwheid k/D moeten worden gebruikt voor de bepaling van f ;

6.2 Het snelheidsprofiel van een laminaire en een turbulente stroming

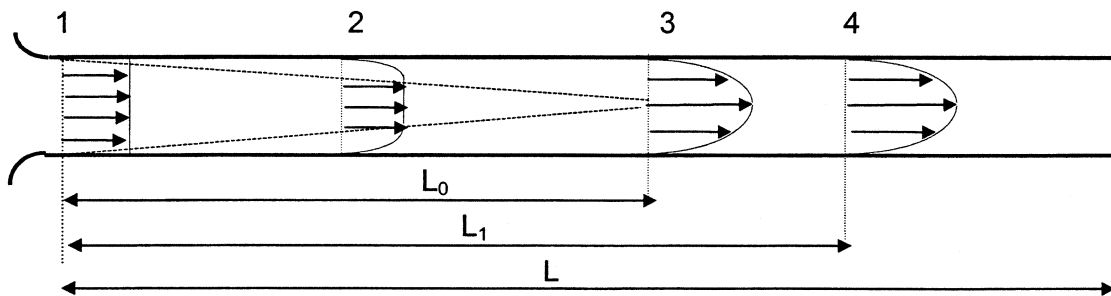
In hoofdstuk 4 is het snelheidsprofiel voor een laminaire stroming in een buis gegeven. Het verloop bleek parabolisch (figuur 4.05). Een turbulente stroming geeft een ander snelheidsprofiel. Zeer dicht bij de wand is er geen snelheid loodrecht op de wand mogelijk. Het gevolg hiervan is dat zich zeer dicht bij de wand een dunne **grenslaag** bevindt (0,1 - 0,5 mm) waar de viscositeit lager is dan de turbulente viscositeit. Om toch het lineaire verloop van de schuifspanning te krijgen zal de afschuiving dicht bij de wand dus groter moeten zijn dan iets van de wand af. Het stromingsprofiel bij een turbulente stroming zal er dus ten opzicht van een laminair profiel als volgt uitzien:



Figuur 6.03 Snelheidsprofielen voor laminaire en turbulente stromingen voor dezelfde Φ_v

6.3 Instroomverlies

Bij de instroming in een buis zal bij een goed afgeronde instroomopening het snelheidsprofiel aanvankelijk vrijwel homogeen zijn, zie figuur 6.04, doorsnede 1, met een snelheid $v_o = v_{gem}$.



Figuur 6.04 Snelheidsprofielen op enige afstand van de instroming in een buis

Door de wandwrijving zal langs de wand het fluïdum vertraagd worden. Er vormt zich een in dikte toenemende laag waarin de snelheid afneemt van de aanvankelijk nog homogene snelheidsverdeling in het middengebied tot nul aan de wand, doorsnede 2. Deze zogenaamde grenslaag groeit stroomafwaarts aan tot na een lengte L_0 de buis volledig gevuld is. Daarna begint het snelheidsprofiel zich om te vormen tot dat van de volledig ontwikkelde stroming, die na de inlooptengete L_i bereikt is. Deze veranderingen van snelheidsprofiel, in de opeenvolgende doorsnedes leiden tot een extra drukverlies. Dit drukverlies wordt verrekend in een verliescoëfficiënt: ζ . De waarde van deze verliescoëfficiënt varieert van $0 < \zeta_{in} < 1,5$. Bij een goed afgeronde instroming kan soms het verlies verwaarloosd worden. Voor het totale drukverlies door het instromen kunnen we schrijven:

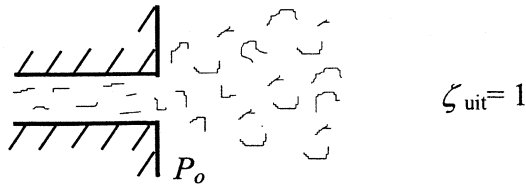
$$\Delta p_{in} = \zeta_{in} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{gem}^2 \quad (6.04)$$

Voor een laminaire stroming is $\zeta_{in} \approx 1,3$ en $L_i/D \approx 0,08Re_D$

Voor een turbulente stroming is $\zeta_{in} \approx 0$ en $L_i/D \approx 40$

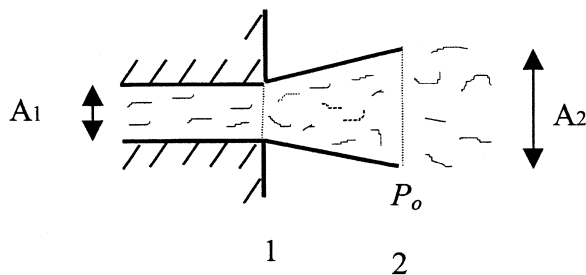
6.4 Uitstroomverlies

Bij uitstroming uit een leiding in een grote ruimte vormt zich een vrije straal, zie figuur 6.05, waarbij tenslotte alle kinetische energie in warmte wordt omgezet.



Figuur 6.05: *Uitstroming in een grote ruimte*

De druk in de uitstroomopening is gelijk aan die in de ruimte. De verliescoëfficiënt ζ_{uit} is dus gelijk aan 1. Het uitstroomverlies is te verminderen door de uitstroming via een verwijdende buis te laten plaatsvinden, zie figuur 6.06.



Figuur 6.06 *Het verminderen van het uitstroomverlies*

De druk p in de einddoorsnede is dan lager dan in het geval van figuur 6.05, tenminste als het wrijvingsverlies in het divergerende gedeelte niet te groot is.

Rekenvoorbeeld 6.b:

Bij een uitstroming wordt het uitstroomverlies verminderd door de uitstroming via een verwijde buis te laten plaatsvinden, zoals in figuur 6.06.

Voor de doorsneden geldt $A_1 = \frac{1}{2} \cdot A_2$

Gevraagd:

Laat het verschil in druk zien ter plekke van de uitstroming (2) ten opzichte van punt (1).

Oplossing:

Omdat de volumestroom Φ_v gelijk blijft, en het oppervlak bij (2) wordt verdubbeld, geldt voor de snelheid:

$$v_{2\text{gem}} = \frac{1}{2} \cdot v_{1\text{gem}} \quad (\text{volgens de formule 3.01})$$

Voor het drukverschil bij (1) geldt: $\Delta p_1 = \frac{1}{2} \rho v_1^2$

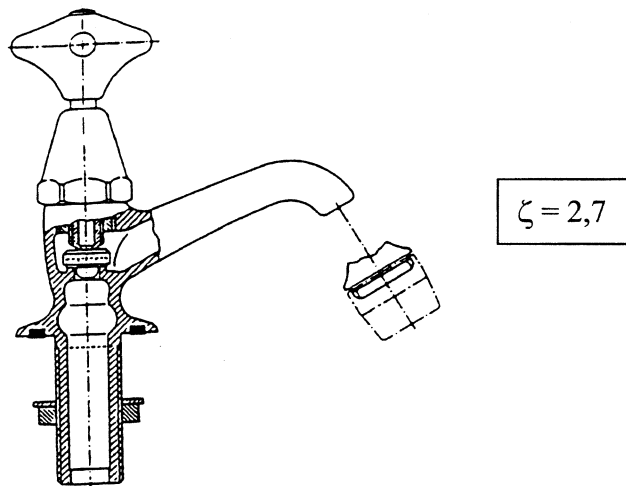
Voor het drukverschil bij (2) geldt: $\Delta p_2 = \frac{1}{2} \rho (\frac{1}{2}v_1)^2 = \frac{1}{4} \cdot \Delta p_1$

6.5 Afsluiters en terugslagkleppen

Afsluiters en terugslagkleppen worden appendages genoemd en zij veroorzaken drukverlies en dit verlies is te berekenen met:

$$\Delta p = \zeta \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\text{gem}}^2 \quad (6.05)$$

Hierin is ζ de verliescoëfficiënt van de appendage die door de fabrikant van het betreffende apparaat opgegeven moet worden. Deze waarden van ζ gelden voor het geval dat de stroming vóór de appendage volledig ontwikkeld is. Als dat niet het geval is, bijvoorbeeld doordat de stroming verstoord is door een voorliggende bocht, dan is Δp niet te voorspellen. In figuur 6.07 is een waarde voor ζ voor een afsluiter(kraan) gegeven.

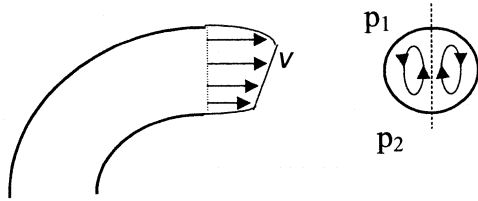


Figuur 6.07 Staande tapkraan met vlakke tapafsluiter

De verliezen treden niet alleen in de appendage zelf op. Het verstoorde snelheidsprofiel zal zich in de volgende buis weer ontwikkelen tot een volledig ontwikkeld snelheidsprofiel. Dit gaat met energieverliezen gepaard, die tevens in ζ zijn opgenomen.

6.6 Bochten

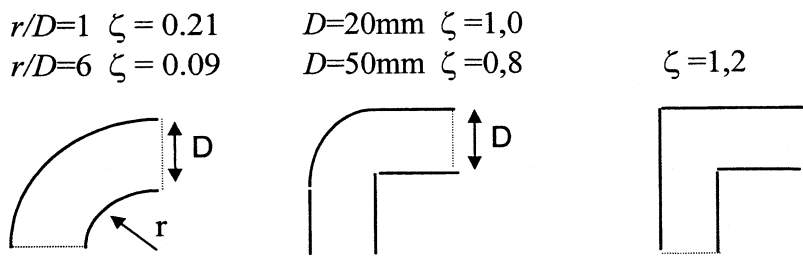
In een bocht is de stroming vrij gecompliceerd door het optreden van zogenaamde secundaire stromingen. Om de fluïdumdeeltjes de bocht om te krijgen, moet er een centripetale kracht op werken. Deze wordt geleverd doordat zich een drukveld instelt met hogere drukken aan de buitenkant van de bocht. In figuur 6.7 is dit te zien, hier is $p_1 > p_2$.



Figuur 6.08 Drukverschillen in een bocht.

Dit drukverschil is zodanig dat de stroming gemiddeld de bocht zal volgen, maar is te klein voor de deeltjes met de grootste snelheid die dus naar de buitenkant zullen bewegen. Anderzijds worden fluïdumdeeltjes met lage snelheid, dat zijn de deeltjes langs de wand, naar de binnenzijde van de bocht gedreven. Hierdoor ontstaan twee wervels als aangegeven in Figuur 6.08 en schuift het gebied van de maximum snelheid naar de buitenzijde van de bocht. Deze secundaire stromingen waardoor de fluïdumdeeltjes spiraalachtige banen volgen, blijven in een achter de bocht aanwezige rechte buis vrij lang bestaan. Pas op ongeveer 40 diameters achter de bocht is de stroming weer volledig ontwikkeld.

Het verdwijnen van de secundaire stromingen gaat gepaard met dissipatie. Een bocht geeft een extra weerstand die wordt aangegeven met een weerstandscoefficiënt ζ . Ook hier vindt weer een gedeelte van het door de bocht veroorzaakte verlies plaats in de erachter geplaatste buis. Dit verlies is echter in ζ meegenomen. In handboeken zijn waarden van ζ te vinden. Ter oriëntatie zijn in figuur 6.09 enige waarden gegeven.

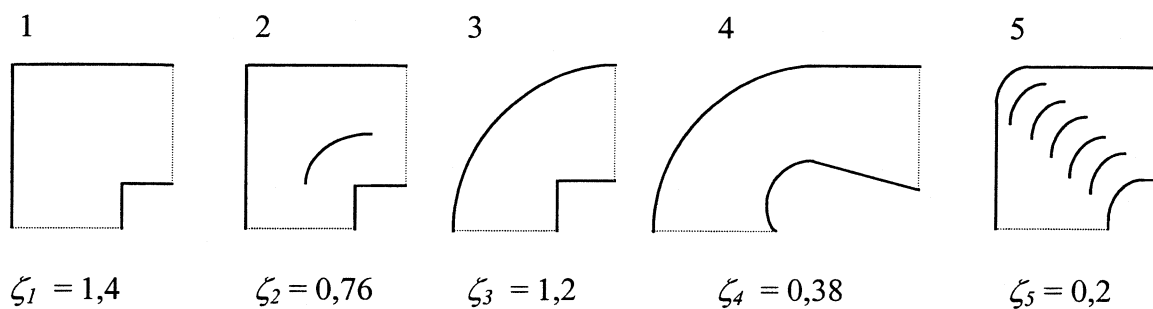


Figuur 6.09 Weerstandscoefficienten van enkele bochten.

De hoge waarden van de bochtstukken met de scherpe binnelhoek zijn te verklaren uit het verschijnsel dat de stroming deze hoek niet kan volgen en "loslaat". Achter de hoek vormt zich dan een wervelgebied, dat tot extra verlies leidt, zie ook figuur 6.10.

Er is een aantal mogelijkheden om de stromingsverliezen in bochten te verminderen en dit is in Figuur 6.9 geïllustreerd voor kanalen met een rechthoekige doorsnede:

- a. de bocht **afplatten (3 en 4)** in de radiale richting, waardoor het radiale drukverschil kleiner wordt;
- b. de bocht te voorzien van zogenaamde **leidschoepen (2 en 5)**;
- c. het **loslaatgebied (4)** op te vullen.



Figuur 6.10 *Mogelijkheden om de verliezen in bochten te verminderen*

6.7 Samenvatting

De algemene formule voor drukverschil over een buis is:

$$\Delta p = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\text{gem}}^2$$

In het **Moody-diagram** kan voor de volledig ontwikkelde buisstroming de buisweerstandsfactor f worden afgelezen als functie van Re_D en k/D (k is de ruwheid van de buiswand). Er zijn 3 gebieden in het diagram te onderscheiden:

Soort stroming	Interval v/h kengetal van Reynolds Re	
Laminair	$Re < 2000$	de stroming is volledig laminair
kritiek gebied	$2000 < Re < 4000$	de stroming kan laminair zijn en dan kan de lage weerstandsfactor genomen worden of turbulent en dan moet de hoge waarde worden gebruikt
turbulent	$Re > 4000$	de stroming is turbulent en de lijnen voor $Re > 4000$ met de buisruwheid k/D moeten worden gebruikt voor de bepaling van f ;

Er geldt dat: $f_{\text{turbulent}} > f_{\text{laminair}}$

Drukverschillen die ontstaan bij:

het instromen in een buis:

Deze drukverschillen zijn te wijten aan de hechtvoorwaarde (indien opening afgerond). Een verandering van het snelheidsprofiel in de doorsnede leidt tot een drukverlies, dat verrekend wordt in een verliescoëfficiënt ζ .

Indien de instroomopening niet goed is afgerond, treedt er nog een extra verlies op.

uitstroming uit een buis in een grote ruimte:

Er vormt zich een vrije straal, waarbij alle kinetische energie in warmte wordt omgezet. De druk in de uitstroom opening is gelijk aan die in de ruimte. $\zeta = 1$.

Afsluiters/ terugslagkleppen.

Het drukverschil Δp is:

$$\Delta p = \zeta \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\text{gem}}^2$$

Hierin wordt ζ door de fabrikant gegeven.

de stroming in de bocht van een buis:

Er ontstaat hogere drukken aan de buitenzijde van de bocht en hierdoor treden secundaire stromingen op. De energie van deze secundaire stromingen dissipeert waardoor een bocht een extra weerstand introduceert, die we ook aangeven met een verliescoëfficiënt. De verliezen zijn op een aantal manieren te verminderen:

de bocht afplatten in radiale richting: het radiale drukverschil wordt kleiner.

de bocht te voorzien van zogenaamde leidschoepen.

het loslaat gebied op te vullen.

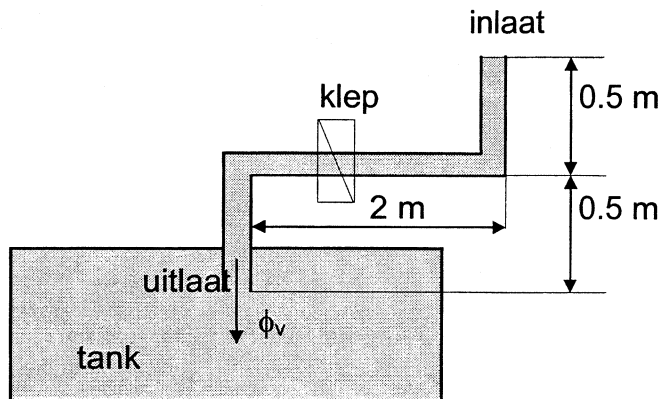
Het totale drukverschil Δp over een buis is:

$$\Delta p = \sum \zeta \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\text{gem}}^2$$

6.8 Oefenopgaven

6.8.1 Een beluchtungsleiding

Een beluchtungsleiding (diameter 2,75 cm) is op een benzinetank van een auto aangesloten. De leiding komt uit in de open atmosfeer. Als gevolg van het wegpompen van de benzine ontstaat er onderdruk in de tank, waardoor lucht via de inlaat en de leiding aangezogen wordt. In de leiding is een terugslagklep opgenomen, die sluit als de druk in de tank hoger is dan van de omgeving, om te voorkomen dat benzine dampen in het milieu komen. Als hij openstaat (bij onderdruk) is de weerstandsfactor $\zeta = 2,7$.



Figuur 6.11 Een benzinetank met beluchtungsleiding

Gegeven:

lucht: $\rho = 1.205 \text{ kg/m}^3$ $\eta = 1.81 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

verliesfactor v.d. inlaat: $\zeta_{in} = 2$
terugslagklep: $\zeta_t = 2.7$
bochten: $\zeta_b = 1.2$
leiding : $D = 2.75 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
 $k = 0.165 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
 $L = 3 \text{ m}$

Gevraagd:

Hoe groot is het uitstroomverlies $\zeta_{\text{uitstroom}}$ bij het uiteinde van de leiding?

Geef de oplossingsvergelijking voor het geval dat door een lage onderdruk de lucht laminair door de leiding stroomt. Geef ook aan hoe deze vergelijking opgelost kan worden.

Bepaal de volumestroom als er een drukverschil van $\Delta p = 4300 \text{ N/m}^2$ door onderdruk is (Maak iteratief gebruik van het Moody-diagram)

6.8.2 Voorraadvat op zolder

In een huis wordt warm water opgeslagen in een voorraadvat op zolder. Door een leiding stroomt water eerst door een warmtewisselaar en dan naar de benedenverdieping.

Voor het bepalen van de buisweerstandsfactor f wordt het diagram van Moody veel gebruikt.

Gegevens

Volumestroom v/h water	Φ_V	= 2	liter/ minuut
Soortelijke massa v/h water	ρ	= 1000	kg/m ³
Dynamische viscositeit	η	= 0.0011	Pa · s
Diameter van de leiding	D	= 20	mm
Lengte van de leiding	L	= 12	m
Aantal bochten	N_{bocht}	= 6	
Weerstandfactor per bocht	ζ	= 1.25	

Gevraagd:

Is de stroming laminair of turbulent voor de vereiste volumestroom $\Phi_V = 2$ liter/minuut?
Bereken het benodigde drukverschil Δp_1 over de leiding voor een gladde buis $k/D < 10^{-6}$

Er treedt kalkaanslag op de wand van de leiding en na verloop van tijd is deze:

laagdikte v/h kalk	$t_{\text{kalk}} = 6$	mm
wandruwheid	$k = 0,08$	mm

Bereken het benodigde drukverschil Δp_2 over de leiding voor een volumestroom $\Phi_V = 2$ liter/minuut.

7 Weerstand van omstroomde lichamen

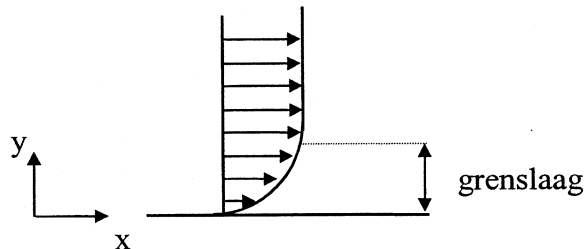
In dit hoofdstuk worden de volgende **onderwerpen** behandeld:

- **grenslagen;**
- **de weerstandscoefficiënt C_D**

Nadat in het vorige hoofdstuk gekeken is naar de weerstand van een stroming in een buis, wordt nu gekeken naar de weerstand van een omstroomd object. De weerstand blijkt te kunnen worden onderverdeeld in **vormweerstand** en **wrijvingsweerstand**. De stroming in de grenslaag is hiervoor een zeer belangrijke factor.

7.1 Grenslagen

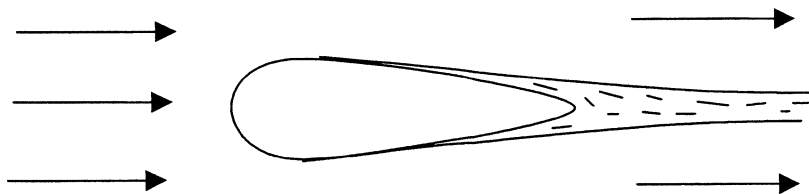
In Hoofdstuk 2 hebben we gezien dat een stromend fluïdum aan de wand de snelheid van de wand moet hebben: de hechtvoorwaarde. We nemen als eenvoudig voorbeeld een vlakke wand met een homogene stroming evenwijdig aan die wand, zie figuur 7.01.



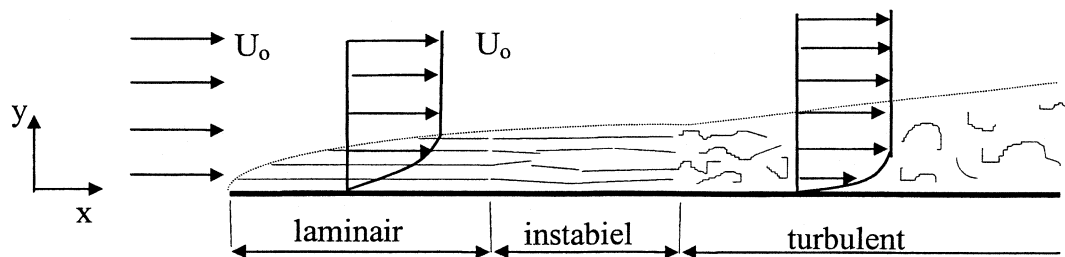
Figuur 7.01 Grenslaag van de stroming om een lichaam

Op enige afstand van de wand zal deze praktisch geen invloed meer hebben om de stroming. Daar is een homogene snelheidsverdeling: U_0 . We noemen dit de buitenstroming. In de buurt van de wand zal echter een laag zijn waarin de snelheid u afneemt van $u = U_0$ tot $u = 0$ aan de wand. Deze laag wordt de grenslaag genoemd.

Ook bij niet vlakke wanden, zoals bijvoorbeeld bij het in figuur 7.02 geschetste stroomlijn-vormige lichaam zal zich langs de wand een grenslaag vormen, die aan het einde het lichaam verlaat en aanleiding is tot de vorming van een zog, een gebied met lage snelheden, dat stroomafwaarts vervaagt door impulsuitwisseling met de buitenstroming. In dit geval zal de buitenstroming niet homogeen zijn, althans niet in de buurt van het lichaam.



Figuur 7.02 Grenslaag bij een stroomlijn-vormig lichaam



Figuur 7.03 Grenslaagontwikkeling

In figuur 7.03 is de grenslaagontwikkeling geschetst langs een vlakke wand in een homogene stroming. Voor de duidelijkheid is de dikte van de grenslaag veel te groot getekend ten opzichte van de afmetingen in de x-richting.

7.1.1 Omslag

Het aanstromende fluïdum zal zich aan de wand hechten en een tegenwerkende schuifspanning uitoefenen op het erboven bewegende fluïdum waardoor dit afgeremd wordt en dan ook deel uitmaakt van de grenslaag. Zo worden steeds verder van de plaat gelegen lagen afgeremd: de grenslaag groeit in dikte. De in figuur 7.3 getekende begrenzing van de grenslaag is dus **niet** een stroomlijn. Hij wordt door de fluïdumdeeltjes omstroemd, waarvan op dat moment de snelheid begint af te nemen. Op een gegeven moment wordt de stroming instabiel, bij een waarde $x = x_i$, waarvoor geldt:

$$(Re_x)_i = \frac{U_0 \cdot \rho \cdot x_i}{\eta} \approx 60\,000 \quad (7.01)$$

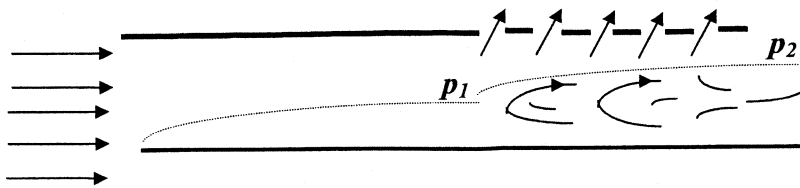
Van dit punt af blijken kleine storingen in de grenslaag niet meer uit te dempen, maar zich te kunnen versterken. Deze storingen groeien aan en leiden tot de vorming van wervels die op hun beurt aanleiding zijn tot het turbulent worden van de grenslaag. We zeggen: de grenslaag is van laminair naar turbulent omgeslagen. De omslag is voltooid bij $x = x_r$, waarvoor geldt:

$$(Re_x)_r = \frac{U_0 \cdot \rho \cdot x_r}{\eta} = 100\,000 \text{ tot } 3\,000\,000 \quad (7.02)$$

De waarde 10^5 zal het geval zijn bij sterke verstoring van de grenslaagstroming, dus bij turbulente buitenstroming en bij ruwe wanden. Is de buitenstroming echter zeer laag turbulent en de wand glad, dan is een waarde van $3 \cdot 10^6$ haalbaar. Dit zijn echter laboratoriumcondities.

7.1.2 Loslating van grenslagen

In Figuur 7.04 is een plaat geschetst die zich in een windtunnel bevindt.



Figuur 7.04 *Laminaire loslating*

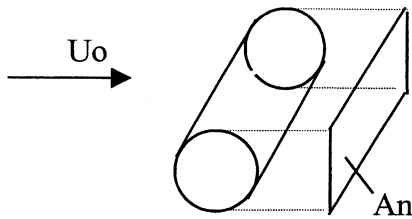
Aan de bovenzijde van de windtunnel is de wand geperforeerd waardoor lucht kan ontsnappen. De snelheid van de buitenstroming van de plaat neemt dus af en volgens de wet van Bernoulli moet dus de druk, die we constant over een doorsnede veronderstellen, toenemen in stromingsrichting. De laminaire grenslaag die zich op de plaat ontwikkelt, zal dus over het achterste deel een positieve drukgradiënt hebben: $p_2 > p_1$. Een luchtdeeltje dicht bij de wand ondervindt nu drie krachten: een tegenwerkende wrijving ten gevolge van de snellere laag onder hem, een meeslepende wrijving ten gevolge van de snellere laag boven hem en een resulterende drukkracht naar links. Deze laatste kan funest blijken en het deeltje naar links drijven. Er komt dan langs de plaat een stroming naar links op gang, die loslaat en aanleiding is tot de vorming van een breed wervelgebied. Dit is een geval van laminaire loslating.

Nemen we in figuur 7.04 het voorstuk van de plaat langer, dan kan de grenslaag al omgeslagen zijn voor hij de positieve drukgradiënt bereikt. In een turbulente grenslaag zijn echter de wrijvingskrachten dicht bij de wand en de snelheid van de deeltjes aldaar veel groter. Een turbulente grenslaag zal dus in staat zijn langer tegen een positieve drukgradiënt op te tornen met als gevolg dat deze langer aan blijft liggen en later loslaat.

Aangetoond kan worden dat loslating alleen maar kan optreden bij een positieve drukgradiënt. Omgekeerd leidt een positieve drukgradiënt echter niet zonder meer tot loslating.

7.2 De weerstandscoefficiënt

Als voorbeeld wordt hier de stroming om een dwars aangestroomde cilinder beschouwd.



Figuur 7.05 *Dwars aangestroomde cilinder*

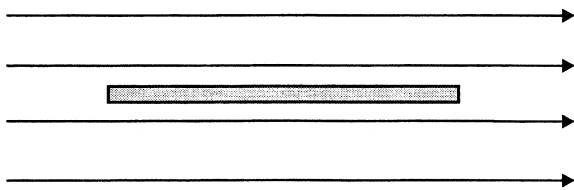
Er kan aangetoond worden met behulp van dimensie-analyse dat de weerstand van de cilinder in de stroming afhankelijk is van het geprojecteerde oppervlak A_n en de snelheidsdruk $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2$. Hiervoor kan dan geschreven worden:

$$F = C_D \cdot A_n \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_0^2 \quad \text{met } A_n = b \cdot h \quad (7.03)$$

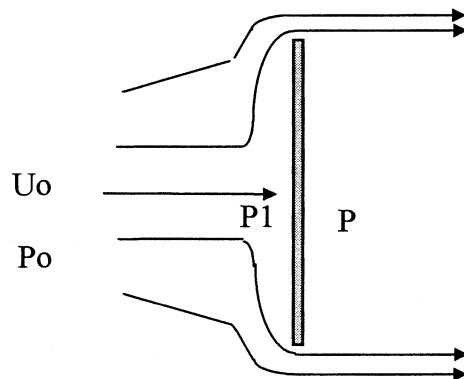
C_D is de weerstandscoefficiënt die een functie is van Re_D en van de vorm van het omstroomde lichaam.

De weerstand kan worden onderverdeeld in twee delen:

De wrijvingsweerstand. Deze weerstand is het gevolg van de viscositeit van het medium, dus van de schuifspanningen aan het oppervlak van het omstroomde lichaam. Een turbulente grenslaag geeft aanleiding tot een hogere wrijvingsweerstand dan een laminaire vanwege de hogere schijnbare viscositeit. Een vlakke plaat evenwijdig aan de stromingsrichting ondervindt allen wrijvingsweerstand, zie figuur 7.06.



Figuur 7.06 *Wrijvingsweerstand*



Figuur 7.07 *Vormweerstand*

De vormweerstand. Deze weerstand is het gevolg van het drukverlies dat bij de omstroming optreedt. Het gevolg is dat de druk aan de voorkant van het omstroomde object hoger is dan aan de achterkant. Een vlakke plaat loodrecht op de stromingsrichting ondervindt allen vormweerstand, zie figuur 7.07

Met de omstroming van een cilinder zullen we verdere opheldering omtrent de weerstanden geven:

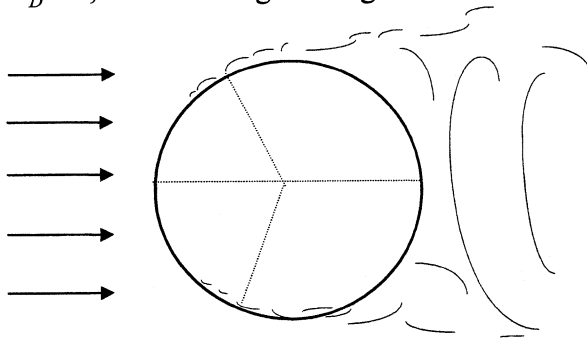
Stel een cilinder wordt omstroombd door een wrijvingsloos medium (potentiaalstroming). Het spreekt voor zich dat dan de wrijvingsweerstand gelijk aan nul is. Echter dat ook de vormweerstand nul is, heeft wat uitleg nodig. Langs de stroomlijnen geldt de wet van Bernoulli aangezien er geen wrijving is. Voor de cilinder heerst een hogere druk omdat de aanstromende lucht moet afremmen. In het drukpunt recht voor de cilinder is de snelheid namelijk nul. Echter aan de zijkanten is de druk lager omdat er een hogere snelheid heerst (twee maal de ongestoorde snelheid) vanwege de nauwer doorgang. Daarachter zal de snelheid weer toenemen en de druk dus ook. Het gevolg is dat de stroming volledig symmetrisch is, de drukverdeling ook volledig symmetrisch is en de vormweerstand dus nul is.

Als dezelfde cilinder nu omstroombd wordt door lucht zal er vanwege de viscositeit een wrijvingsweerstand zijn. Door de wrijvingsverliezen zal de druk altijd lager zijn dan het geval is bij een wrijvingsloos medium. Alleen de stuwpuntdruk lijdt hier niet onder. Als de druk naar achteren lager is dan bij het wrijvingsloze geval met weerstand nul, zal er dus altijd een druk-, vormweerstand moeten zijn.

Er treedt nog een complicatie op. Indien een grenslaag tegen een drukgradiënt in moet, kan er loslating optreden. Het gevolg is een groot zog en daarmee gaat een grote vormweerstand gepaard. Bekend is dat een laminaire grenslaag eerder loslaat dan een turbulente. Om een lagere weerstand te krijgen kan het soms dus voordelig zijn om met oppervlakteruwheden expres een turbulente grenslaag te creëren, omdat deze langer “aanligt” en leidt tot een kleiner zog en dus tot een kleinere vormweerstand. Wel zal hierdoor de wrijvingsweerstand iets toenemen!

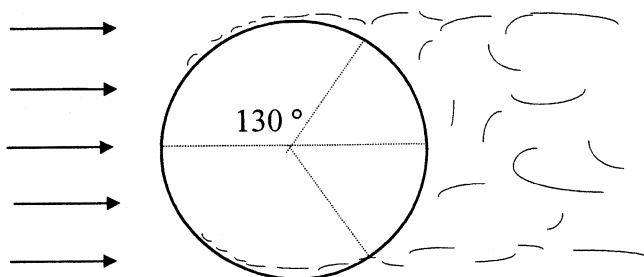
Bij de omstroming van een cilinder kan als vuistregel worden genomen dat:

- a. $Re_D < 1,06 \cdot 10^5$. De grenslaag laat laminair los bij een hoek van ongeveer 80° . (fig. 7.08.)



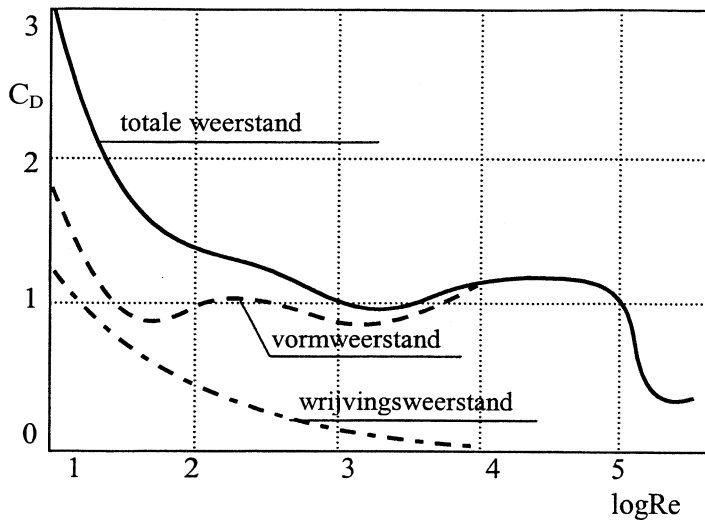
Figuur 7.08 Loslating van de laminaire grenslaag

- b. $Re_D < 2,12 \cdot 10^5$. De grenslaag wordt zeer snel turbulent en laat los bij een hoek van $\pm 130^\circ$.



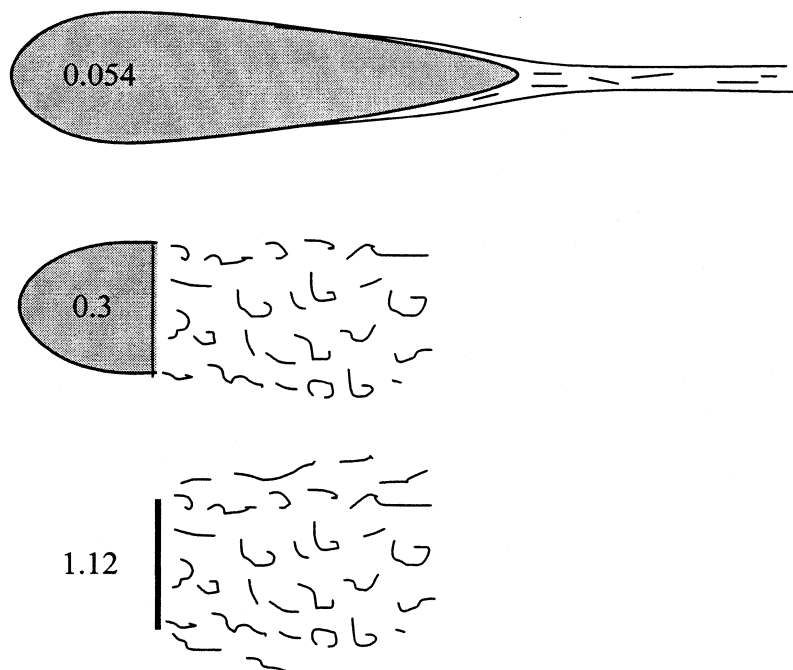
Figuur 7.09 Loslating van de turbulente grenslaag

De daling door het langer aanliggen van de turbulente grenslaag is ook te zien in figuur 7.10. Tevens zien we dat **bij de cilinder** bij hoger Re_D de wrijvingsweerstand bijna te verwaarlozen is ten opzichte van de vormweerstand. Bij zeer goed ontworpen vleugels is het zog dusdanig klein dat het er wel degelijk toedoet hoelang de grenslaag laminair blijft. De wrijvingsweerstand is dan dus niet verwaarloosbaar klein.



Figuur 7.10

Als grenslagen loslaten, is de vormweerstand meestal veel groter dan de wrijvingsweerstand. Willen we bereiken dat een omstroomd lichaam een lage weerstand heeft, dan moeten we grenslaagloslating trachten te voorkomen. Dit kan soms door het lichaam een zodanige vorm te geven dat de positieve drukgradiënten klein zijn, waardoor de buitenstroming in staat is de grenslaag, tegen drukstijging in, mee te slepen. Ter vergelijking zijn in figuur 7.11 enige waarden van C_D gegeven bij $Re_D = 2.2 \cdot 10^6$ voor een luchtschipmodel, eenvorm van het voorste gedeelte van het model en een schijf met dezelfde diameter.

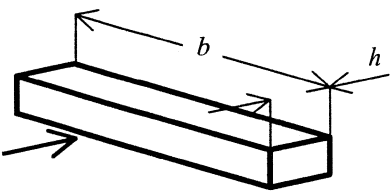



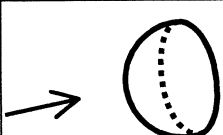
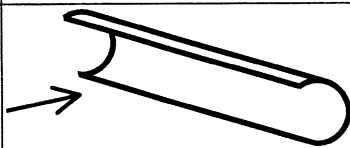
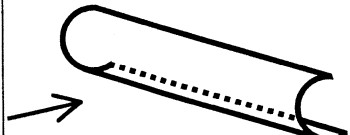


Figuur 7.11 C_D -waarden voor enkele vormen van een 'luchtschipmodel'

Bij automobielen is het belangrijk dat er een zo laag mogelijke luchtweerstand is. Door het veranderen van de vorm kan de vormweerstand worden beïnvloed. Hier wordt meestal niet van C_D gesproken maar van een weerstandscoefficiënt C_w . Voor de luchtweerstand van een auto kan dus geschreven worden:

$$F_w = C_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A \quad (7.04)$$

Voor de weerstand geldt dat deze evenredig is met het kwadraat van de snelheid, de C_w -waarde is onafhankelijk van de snelheid. In figuur 7.12 zijn enkele vormen gegeven met hun C_w -waarde.

Vorm	Figuur	$C_D (Re > 1000)$
Balk	 $b/h = \infty$ 2,05 $b/h = 1$ 1,05	
Schijf		1,17
Ring		1,20 (gebaseerd op ring-oppervlak)
Halve bol (holle kant richting stroming)		1,42
Halve bol (bolle kant richting stroming)		0,38
C-vorm (holle kant richting stroming)		2,30
C-vorm (bolle kant richting stroming)		1,20

Figuur 7.12 Enkele vormen met hun c_w -waarde

7.3 Samenvatting

De grenslaag van een stroming langs een wand, is het gebied vanaf de wand, waar de snelheid van de stroming gelijk aan die van de wand is, tot aan de plaats waar de wand praktisch geen invloed meer heeft op de stroming. Deze grenslaag groeit in dikte, doordat het erboven gelegen fluïdum afgeremd wordt door de grenslaag en dan er ook deel van uitmaakt

Loslating van de grenslaag kan alleen optreden bij een positieve drukgradiënt. Omgekeerd leidt een positieve drukgradiënt niet zonder meer tot loslating.

De luchtweerstand van een auto:

$$F = C_D \cdot A_n \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_0^2 \quad \text{met } A_n = b \cdot h \quad (7.03)$$

Het benodigde vermogen bedraagt:

$$P = C_D \cdot A_n \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_0^3 \quad \text{met } A_n = b \cdot h \quad (7.04)$$

De C_w -waarde is de weerstandscoefficiënt, die kan worden onderverdeeld in twee delen, de wrijvingsweerstand en de vormweerstand. In praktijk zijn beide weerstanden moeilijk te onderscheiden en moeten proefondervindelijk worden bepaald.

7.4 Oefenopgave

7.4.1 Volkswagen kever cabrio

Een volkswagen kever cabrio toert op een windstille zonnige dag over het vlakke asfalt met een snelheid van 75 km/uur.

Gegevens:

$$\rho_{\text{lucht}} = 1.25 \text{ kg/m}^3$$

$$C_w = 0.68$$

$$A = 1.76 \text{ m}^2$$

Gevraagd:

Bereken de weerstandskracht ten gevolge van de wind.

Bereken het door de luchtweerstand gevraagde vermogen.

Bereken het door de luchtweerstand gevraagde vermogen als de kever tegen windkracht 5 (= 10 m/s) in rijdt.

8 Warmte, warmtestroom en warmtebalans

In dit hoofdstuk worden de volgende **onderwerpen** behandeld:

- warmte (energie) Q
- soortelijke warmte c
- smeltwarmte L_s
- verdampingswarmte L_v
- warmtestroom Φ_w en warmtestroomdichtheid ϕ_w
- warmtebalans

8.1 Het begrip warmte

Als een systeem met een temperatuur θ_s in een omgeving wordt geplaatst waar de temperatuur θ_o is, zal er zich na verloop van tijd een evenwicht instellen waarbij het systeem de temperatuur van de omgeving zal aannemen.

Bijvoorbeeld: als een pak melk uit de koelkast wordt gehaald en op het aanrecht wordt gezet, zal de temperatuur van dit pak melk na enige tijd dezelfde temperatuur hebben als er in de keuken heerst. Het pak melk is hier het systeem en de keuken de omgeving.

De verandering van temperatuur is voor te stellen als een uitwisseling van **energie** tussen het systeem en de omgeving. Deze hebben een bepaalde inwendige energie die gelijk is aan de som van de kinetische en potentiële energie van de willekeurige bewegingen van de atomen en moleculen in een stof. Deze uitwisseling van energie wordt **warmte** genoemd en heeft het symbool Q . Q is positief als er aan het systeem warmte wordt toegevoerd door de omgeving (θ_s stijgt) en negatief als er aan het systeem warmte wordt onttrokken door de omgeving (θ_s daalt). Als $\theta_s = \theta_o$, dan is er thermisch evenwicht en vindt er geen uitwisseling van energie plaats, $Q = 0$.

Het begrip **warmte** Q kunnen we nu als volgt definiëren:

Warmte is de energie die uitgewisseld wordt tussen een systeem en zijn omgeving als gevolg van een temperatuurverschil $\Delta\theta$ dat bestaat tussen het systeem en zijn omgeving.

Net als de grootte arbeid (symbool W) is warmte de energie die onttrokken of toegevoegd kan worden aan een systeem. Het begrip warmte moet niet verward worden met het begrip temperatuur. Van een bepaald systeem kan een bepaalde temperatuur waargenomen worden, niet een warmte. De uitspraak: "Het is een warme dag vandaag" is dus eigenlijk verkeerd, we hebben het dan over de temperatuur en niet over de warmte.

Voordat bekend was dat warmte een uitwisseling van energie is, werd deze uitgedrukt in calorieën. Een calorie is de hoeveelheid warmte voor die nodig is om 1 gram water van 14,5 °C naar 15,5°C te laten stijgen.

In 1948 is besloten om voor wetenschappelijke en technische berekeningen energie uit te drukken in de SI-eenheid J (Joule) en de omrekeningsfactor is: 1 cal = 1,186 J.

Verder is nog in omloop de eenheid Cal (Calorie) bij levensmiddelen om de voedingswaarde aan te geven, waarbij 1 Cal = 1 000 cal. Dit is dus eigenlijk een kilocalorie (kcal) en deze eenheid wordt nog steeds gebruikt in de aanduiding van de voedingswaarde van levensmiddelen en dranken.

8.2 Soortelijke warmte

Voor iedere stof is een specifieke hoeveelheid energie nodig ^{om} ~~een~~ 1 kg één graad Celcius in temperatuur te laten stijgen.

De energie, benodigd om een massa m van een bepaalde stof in temperatuur te laten stijgen

$$is: Q = c \cdot m \cdot (\theta_1 - \theta_0) \quad (8.01)$$

In (8.01) is:

θ_0 = de begintemperatuur;

θ_1 = de eindtemperatuur;

m = de massa;

c = de **soortelijke warmte** (J/kg.K)

De **soortelijke warmte c** is gedefinieerd als:

de hoeveelheid energie die aan 1 kg materie moet worden toegevoegd om deze 1 K in temperatuur te laten stijgen.

In tabel 8.01 is van een aantal stoffen de soortelijke warmte gegeven.

Tabel 8.01 Soortelijke warmte van enkele stoffen in J/kg·K

<i>metalen</i>	<i>c</i>	<i>Vloeistoffen</i>	<i>c</i>	<i>keramische materialen</i>	<i>c</i>	<i>kunststoffen</i>	<i>c</i>	<i>isolatiematerialen</i>	<i>c</i>
staal	260	Ethanol	2430	glas	840	HDPE	2400	glaswol	700
r.v.-staal	500	Water	4190	marmer	880	LDPE	2050	steenwol	1000
zilver	236	IJs	2100	zandsteen	900	PP	1800	PS-schuim	1200
koper	386					PS	1200	PUR-schuim	
aluminium	920					ABS	1400	UF-schuim	
messing	380					PVC	900	glas-schuim	850
						POM	1500	kurk	1800
						PA-6	1700		
						PC	1170		
						PETP	1050		

Voor vaste stoffen en vloeistoffen wordt tijdens de warmte-uitwisseling normaal gesproken de druk constant gehouden. Het is ook mogelijk om in plaats van de druk het volume constant te houden. Dit betekent dat de uitzetting als gevolg van de temperatuurverandering voorkomen wordt door een externe druk op te leggen. Onder beide omstandigheden is de soortelijke warmte verschillend, deze waarden verschillen slechts hooguit enkele procenten. Bij gassen echter kunnen deze verschillen veel groter zijn. Hier wordt meestal gerekend met een c_v en een c_p , waarbij de eerste de soortelijke warmte bij constant volume en de tweede de soortelijke warmte bij constante druk voorstelt

8.3 Smeltwarmte en verdampingswarmte

Als warmte geabsorbeerd wordt door een vaste stof of vloeistof, dan wil dat niet direct zeggen dat de temperatuur ervan stijgt. Een andere mogelijkheid is dat er een verandering optreedt in de aggregatietoestand van de stof (er zijn drie aggregatietoestanden: vaste stof, vloeistof en gasvorm). Water bijvoorbeeld, kan koken, het absorbeert warmte zonder dat de temperatuur hoger wordt.

De smeltwarmte (L_s) is:

de hoeveelheid warmte die per massa-eenheid nodig is om een stof van de vaste fase naar de vloeibare fase te transformeren.

De verdampingswarmte (L_v) is:

de hoeveelheid warmte die per massa-eenheid nodig is om een stof van de vloeibare in de gasvormige fase te transformeren.

In tabel 8.02 is van een aantal stoffen de smelttemperatuur, de smeltwarmte, de verdampingstemperatuur (kookpunt) en de verdampingswarmte gegeven.

Tabel 8.02 Smeltpunt, smeltwarmte, kookpunt en verdampingstemperatuur.

stof	Smeltpunt	Smeltwarmte	Kookpunt	Verdampingswarmte
x	K	kJ/kg	K	kJ/kg
Waterstof	14,0	58,0	20,3	455
Zuurstof	34,8	11,4	90,2	213
Kwik	234	11,4	630	296
Water	273	333	373	2.256
Lood	601	23,2	2.017	858
Zilver	1.235	105	2.323	2.336
Koper	1.356	207	2.868	4.730

Rekenvoorbeeld 8a :

Hoeveel warmte is er nodig om een blok ijs, massa $m = 840 \text{ g}$, $T = -20 \text{ }^\circ\text{C}$, in de vloeibare fase op 25°C te krijgen?

Stel dat we aan dit blok ijs ($m = 840 \text{ g}$, $T = -20^\circ\text{C}$) 240 kJ warmte toevoeren, in welke toestand bevindt het zich dan en wat is hiervan de temperatuur?

Oplossing:

a) Om dit te kunnen beantwoorden, delen we dit proces op in drie stappen:

Verhoog de temperatuur van het blok ijs tot het smeltpunt, 0°C . We vinden dan:

$$Q_1 = c_{ijs} \cdot m \cdot (T_e - T_b) = 2220 \cdot 0.840 \cdot [0 - (-20)] = 37,3 \text{ kJ}$$

Het ijs wordt gesmolten. De benodigde warmte is:

$$Q = L_s \cdot m = 333 \cdot 0.840 = 280 \text{ kJ}$$

De temperatuur van het water wordt verhoogd van 0°C tot 25°C .

Dan is de warmte die hiervoor nodig is:

$$Q_1 = c_{iis} \cdot m \cdot (T_e - T_b) = 4190 \cdot 0.84 (25 - 0) = 87.990 \text{ J} = 88,0 \text{ KJ}$$

De totale warmte Q die voor het hele proces nodig is, is

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 37,3 + 280 + 88,0 = 405 \text{ kJ}$$

b) Er is onder a. berekend dat er $37,3 \text{ kJ}$ nodig is om het blok ijs op 0°C te krijgen.

Met de overige warmte ter grootte van $(240 - 37,3) \text{ kJ}$ kunnen we niet al het ijs smelten, waarvoor immers 280 kJ nodig is, maar slechts een gedeelte hiervan. We kunnen dus nu al zeggen dat de gevraagde temperatuur de smelttemperatuur van het blok ijs is, dus 0°C . De massa ijs m die met de overige hoeveelheid warmte kan worden gesmolten, is

$$m = \frac{Q_{\text{rest}}}{L_s} = \frac{240 - 37,3}{333} = 0,609 \text{ kg} = 609 \text{ g} \quad (8.02)$$

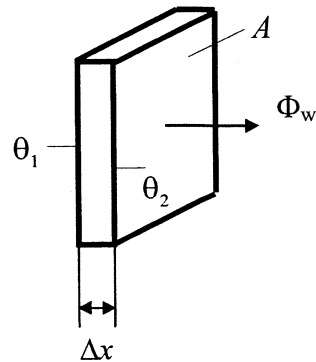
Dus de hoeveelheid ijs die nog over is, is $840 - 609 = 231 \text{ g}$.

Het antwoord op de vraag is dus dat er 609 g water is, 231 g ijs, de temperatuur van het geheel is 0°C .

8.4 Warmtestroom Φ_w en warmtebalans

Indien er een temperatuurverschil is in een lichaam of tussen twee lichamen, dan zal er warmte-transport optreden. In hoofdstuk 9 wordt hier uitgebreid op in gegaan.

In figuur 8.1 is een plaatje geschetst van een wand, waarvan de linkerwand op een temperatuur θ_1 en de rechterwand op een temperatuur $\theta_2 < \theta_1$ gehouden wordt. Als gevolg van dit temperatuurverschil zal er een warmtestroom Φ_w door het plaatje gaan.



Figuur 8.1 Warmtestroom door een plaatje ten gevolge van een temperatuurverschil.

De warmtestroom Φ_w is evenredig met het oppervlak van de doorsnede A en met het temperatuurverschil $\theta_2 - \theta_1$ en omgekeerd evenredig met de dikte Δx . De invloed van de warmtegeleidingscoëfficiënt λ wordt in hoofdstuk 9 behandeld.

De **warmtestroom** Φ_w is de hoeveelheid warmte die door een oppervlak wordt getransporteerd:

De **warmtestroomdichtheid** ϕ_w is gedefinieerd als de warmtestroom per oppervlakte-eenheid:

$$\phi_w = \frac{\Phi_w}{A} \quad (8.2)$$

Rekenvoorbeeld 8.b:

Toelichting: Een zonnecollector verwarmt een stroom water met behulp van de straling van de zon. Hoe groot moet nu het oppervlak van de collector zijn om het water de gewenste temperatuursverhoging te geven?

Gegevens:	de waterinlaattemperatuur	θ_{in}	=	10	°C.
	de wateruitlaattemperatuur	θ_{uit}	=	60	°C.
	de volumestroom	Φ_V	=	1	liter/minuut
	de soortelijke massa	ρ_{water}	=	1000	kg/m ³ ;
	de soortelijke warmte	c_{water}	=	4 200	J/kg K
	de warmtestroomdichtheid	ϕ_{wcol}	=	500	W/m ²

Gevraagd: Het benodigde oppervlakte A_{col} van de zonnecollector

Oplossing:

De warmtestroom van het water is gelijk aan:

$$\Phi_{\text{warmte_water}} = \Phi_V \cdot \rho_{\text{water}} \cdot c_{\text{water}} \cdot (\theta_{\text{uit}} - \theta_{\text{in}}) = 3500 \text{ W}$$

De warmtestroom van de zonnecollector is gelijk aan:

$$\Phi_{\text{warmte_collector}} = \phi_{\text{wcol}} \cdot A_{\text{col}}$$

Gelijkstellen van de warmtestromen geeft:

$$A_{\text{col}} = \frac{\Phi_{\text{warmte_water}}}{\phi_{\text{wcol}}} = \frac{3500}{500} = 7 \text{ m}^2$$

De warmtebalans staat ook wel bekend als de eerste hoofdwet van de thermodynamica voor een open systeem, die berust op de ervaring dat de energie behouden moet blijven.

De **warmtebalans** wordt als volgt gedefinieerd:

De aan een open systeem toegevoerde warmte per tijdseenheid moet gelijk zijn aan de netto uitstroming van warmte uit het systeem plus de toename van energie binnen het systeem plus de door het systeem verrichte arbeid.

Voor een systeem dat geen uitwendige arbeid verricht wordt de warmtebalans:

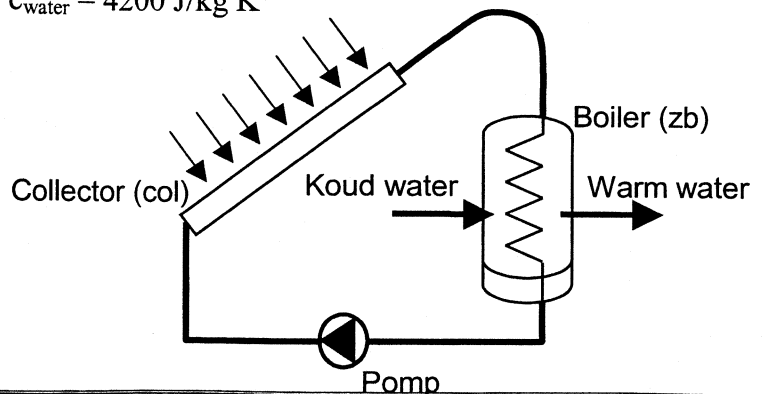
$$\sum_i \text{warmte uitstroom} - \sum_i \text{warmte instroom} = \text{afname van de warmte} \quad (3.03)$$

Rekenvoorbeeld 8.c:

Een zonnecollector verwarmt het water in een boiler. Dit water wordt gebruikt om onder te douchen. Hoelang kan er gedouched worden met deze hoeveelheid water als het verbruik (in liters/min) vast ligt?

Gegeven:

inhoud van de zonneboiler	$V_{\text{zb}} = 100 \text{ liter}$
temperatuur van het onverwarmde water	$\theta_{\text{koud}} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$
temperatuur van het verwarmde water	$\theta_{\text{warm}} = 80 \text{ }^\circ\text{C}$
verwarmingsduur	$t_{\text{zon}} = 10 \text{ uur}$
waterverbruik tijdens douchen	$\Phi_{\text{vdouche}} = 15 \text{ liter/min.}$
de gemiddelde warmtestroomdichtheid	$\phi_{\text{wcol}} = 100 \text{ W/m}^2$
soortelijke massa	$\rho_{\text{water}} = 1000 \text{ kg/m}^3$
soortelijke warmte	$c_{\text{water}} = 4200 \text{ J/kg K}$



Gevraagd:

- a. Het benodigde oppervlak van de zonnecollector (A_{zcol}) om het water in de zonneboiler te verwarmen tot 80 °C
- b. De tijd (t_d) dat gedouched kan worden voor een water temperatuur $\theta_d = 30$ °C en een totale volumestroom $\Phi_{Vdouché} = 15$ liter/min

Oplossing:

- a. De opgeslagen warmte in de zonneboiler is gelijk aan:

$$Q_{zbol} = V_{zb} \cdot \rho_{water} \cdot c_{water} \cdot (\theta_{warm} - \theta_{koud}) = 2,94 \cdot 10^4 \text{ kJ}$$

Het hiervoor benodigde collector oppervlak bedraagt:

$$A_{zcol} = \frac{Q_{zbol}}{\phi_{wzcol} \cdot t_{zon}} = 8,167 \text{ m}^2$$

- b. De balans van de volumestromen ziet er als volgt uit:

$$\Phi_{Vdouché} = \Phi_{Vkoud} + \Phi_{Vwarm}$$

De balans van de warmtestromen:

$$\Phi_{Vdouché} \cdot \theta_{douché} \cdot \rho_{water} \cdot c_{water} = \Phi_{Vkoud} \cdot \theta_{koud} \cdot (\rho_{water} \cdot c_{water}) + \Phi_{Vwarm} \cdot \theta_{warm} \cdot (\rho_{water} \cdot c_{water})$$

Na substitutie van de volumebalans:

$$\Phi_{Vwarm} (\theta_{warm} - \theta_{koud}) = \Phi_{Vdouché} (\theta_{douché} - \theta_{koud})$$

Hieruit volgt:

$$\Phi_{Vwarm} = \Phi_{Vdouché} \frac{\theta_{douché} - \theta_{koud}}{\theta_{warm} - \theta_{koud}} = 4,286 \text{ liter/min}$$

Ter controle:

$$\Phi_{Vkoud} = \Phi_{Vdouché} \frac{\theta_{douché} - \theta_{warm}}{\theta_{koud} - \theta_{warm}} = 10,714 \text{ liter/min}$$

$$\Phi_{Vwarm} + \Phi_{Vkoud} = 4,286 + 10,714 = 15 \text{ liter/min} = \Phi_{Vdouché}$$

Tenslotte kan de douchetijd berekend worden:

$$t_{douché} = \frac{V_{zb}}{\Phi_{Vwarm}} = 23,3 \text{ min}$$

8.5 Samenvatting

Warmte is energie die uitgewisseld wordt tussen een systeem en zijn omgeving als gevolg van een temperatuurverschil dat er tussen die twee bestaat. Het symbool van warmte is Q en wordt tegenwoordig uitgedrukt in Joule.

Om een hoeveelheid materie in temperatuur te laten stijgen is een hoeveelheid **energie** (warmte) nodig:

$$Q = c \cdot m \cdot (T_e - T_b)$$

De **soortelijke warmte** (c) is een materiaalconstante, die wordt uitgedrukt in J/kg·K, en is een maat voor de hoeveelheid energie die aan 1 kg materie moet worden toegevoegd om deze 1 K in temperatuur te laten stijgen.

De soortelijke warmte is sterk temperatuur afhankelijk.

De soortelijke warmte waarmee gerekend wordt bij constante druk: c_p

De soortelijke warmte waarmee gerekend wordt bij constant volume: c_v

De **smeltwarmte** (L_s) is de hoeveelheid warmte die per massa-eenheid nodig is om een stof van de vaste fase naar de vloeibare fase te transformeren.

De **verdampingswarmte** (L_v) is de hoeveelheid warmte die per massa-eenheid nodig is om een stof van de vloeibare in de gasvormige te transformeren.

8.6 Oefenopgave

8.6.1 Een koperen bol

Een koperen bol, massa $m_k = 200$ g, $c_k = 386$ J/kgK, wordt in een oven op een temperatuur van 382°C gebracht. Daarna wordt deze bol in een beker water gelegd, waarvan de temperatuur 22°C bedraagt. De massa m_b van de beker is 300 g en de soortelijke warmte $c_b = 920$ J/kgK. Van het water is bekend dat de massa $m_w = 50$ g en $c_w = 4,19$ kJ/kgK.

Gevraagd:

Wat is na enige tijd, als het thermisch evenwicht zich heeft ingesteld, de temperatuur van het geheel?

Wat moet de temperatuur van het koper zijn, zodanig dat na instelling van het thermisch evenwicht het water net allemaal is verdampt? Ga uit van de gegevens onder a. Eventuele andere benodigde gegevens zijn in de tabellen in dit hoofdstuk te vinden.

9 Warmtetransport

In dit hoofdstuk worden de volgende **onderwerpen** behandeld:

- **warmtegeleiding (conductie);**
- **warmtegeleidingscoëfficiënt λ ;**
- **warmtestroom Φ_w en warmtestroomdichtheid ϕ_w ;**
- **thermische weerstand R_{th} en specifieke thermische weerstand r_{th} ;**
- **warmte-overdracht (convectie)**
- **warmte-overdrachtscoëfficiënt (α);**
- **straling;**
- **emissiecoëfficiënt ϵ ;**

In dit hoofdstuk worden verder de **drie soorten** van warmtetransport besproken:

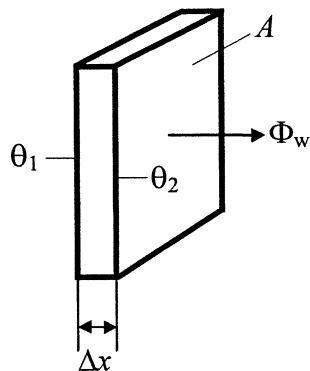
geleiding/conductie is het warmtetransport door een lichaam;

convectie is het warmtetransport tussen vaste stof en fluïdum;

straling: is het directe warmtetransport tussen twee lichamen met verschillende temperaturen.

9.1 Warmtegeleiding

In figuur 9.01 is een plaatje geschetst van een wand, waarvan de linkerwand op een temperatuur θ_1 en de rechterwand op een temperatuur $\theta_2 < \theta_1$ gehouden wordt. Als gevolg van dit temperatuurverschil zal er een warmtestroom Φ_w door het plaatje gaan.



Figuur 9.01 Warmtestroom door een plaatje ten gevolge van een temperatuurverschil.

Het blijkt dat bij te verwaarlozen randeffecten, **de warmtestroom Φ_w** evenredig is met A en met het temperatuurverschil $\theta_2 - \theta_1$ en omgekeerd evenredig met de dikte Δx . Met invoering van de warmtegeleidingscoëfficiënt λ beschrijven we de **wet van Fourier**:

$$\Phi_w = \lambda \cdot A \cdot \frac{\theta_1 - \theta_2}{\Delta x} \quad (9.01)$$

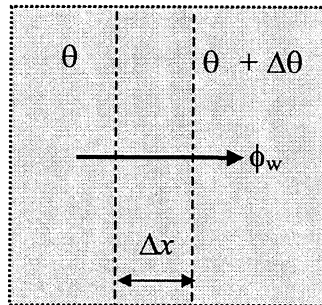
De **warmtestroomdichtheid ϕ_w** is gedefinieerd als de warmtestroom per oppervlakte-eenheid:

$$\phi_w = \frac{\Phi_w}{A} = \lambda \cdot \frac{\theta_1 - \theta_2}{\Delta x} \quad (9.02)$$

De evenredigheidsconstante λ heet de **warmtegeleidingscoëfficiënt** en is een materiaaleigenschap en de dimensie van λ is: W/(m·K). In differentiaalvorm is formule (9.02) als volgt te schrijven:

$$\phi_w = -\lambda \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad (9.03)$$

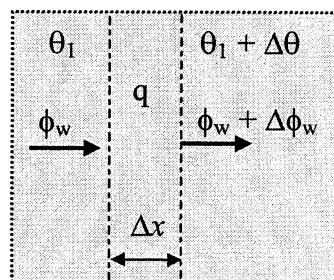
Het minteken is ingevoerd, omdat de warmtestroom in de richting van de lagere temperatuur loopt. Het plaatje kan ook een fictief plaatje binnen het materiaal zijn (zie Figuur 9.2).



Figuur 9.02 Warmtestroomdichtheid ten gevolge van een temperatuur verschil.

Formule (9.03) is geldig voor een eendimensionale **stationaire warmtegeleiding** zonder warmteproductie binnen de beschouwde laag.

Is de toestand niet-stationair en is er een warmteproductie q per volume-eenheid en per seconde, dan kan een energiebalans per m^2 worden opgesteld uitgaande van de situatie in Figuur 9.03.



Figuur 9.03 Verandering van de warmtestroomdichtheid ten gevolge van temperatuurverschillen en door warmteproductie q .

Indien er ook nog rekening wordt gehouden met de toename van de inwendige energie, dan kan voor een volume element ΔV , dat in een niet stationaire toestand verkeert, de onderstaande balans voor warmtetransport in de x-richting, worden opgesteld.

$$\begin{array}{rclcl}
 \boxed{\text{warmtetoevoer}} & + & \boxed{\text{warmteproductie}} & = & \boxed{\text{toename van } Q} & + & \boxed{\text{warmteafvoer}} \\
 \boxed{\phi_w \cdot \Delta A \cdot \Delta t} & + & \boxed{q \cdot \Delta t \cdot \Delta V} & = & \boxed{\rho \cdot c \cdot \Delta \theta \cdot \Delta V} & + & \boxed{(\phi_w + \Delta \phi_w) \cdot \Delta A \cdot \Delta t} \\
 \boxed{\frac{\phi_w}{\Delta x} \cdot \Delta t} & + & \boxed{q \cdot \Delta t} & = & \boxed{\rho \cdot c \cdot \Delta \theta} & + & \boxed{\frac{\phi_w + \Delta \phi_w}{\Delta x} \cdot \Delta t} \\
 \boxed{\frac{-\Delta \phi_w}{\Delta x}} & + & \boxed{q} & = & \boxed{\rho \cdot c \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t}} & & \\
 \boxed{-\frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)} & + & \boxed{q} & = & \boxed{\rho \cdot c \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t}} & &
 \end{array}$$

De afzonderlijke termen zijn ingevuld. De temperatuur θ is nu een functie van de plaats en de tijd en uitwerken levert:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + q = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (9.04)$$

Indien het materiaal homogeen is en de warmtegeleidingscoëfficiënt λ constant is, dan geldt:

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + q = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (9.05)$$

Opmerking 1.

Formule (9.05) is eenvoudig uit te breiden tot een twee- of driedimensionale vorm. Achter de λ vinden we dan de som van de tweede afgeleiden van θ naar x , y en z . Er ontstaan dan de onderstaande vergelijkingen:

$$\lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + q = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (9.05a)$$

$$\lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + q = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (9.05b)$$

De partiële differentiaalvergelijking (9.05) is voor “eenvoudige” warmteproblemen analytisch op te lossen.

De partiële differentiaalvergelijkingen (9.05a) en (9.05b) zijn ook voor “eenvoudige” warmteproblemen alleen maar numeriek op te lossen. Met behulp van de Eindige Elementen Methode zijn de numerieke oplossingen zonder veel inspanningen te verkrijgen, maar de modellering van deze meerdimensionale warmteproblemen vereisen wel een vergaande kennis van de warmteleer.

Opmerking 2.

De warmtegeleiding is een proces op moleculaire schaal. De warmtegeleidingscoëfficiënt zal dus afhankelijk zijn van de moleculaire structuur van het materiaal en van de temperatuur. De grootste waarden van λ vinden we bij de metalen. Dit hangt samen met de vrije elektronen, die voor een krachtig transport van inwendige energie zorgen. Dit verklaart waarom metalen zowel goede elektrische als warmtegeleiders zijn. Bij vaste stoffen zonder vrije elektronen moet de thermische energie alleen via de roostertrillingen getransporteerd worden. Dit gaat aanzienlijk minder snel. Bij vloeistoffen en gassen zijn in deze volgorde de contacten tussen de moleculen minder intensief en is λ dus kleiner. Ter oriëntatie zijn in tabel 9.01 enkele waarden gegeven.

Gassen zijn slechte warmtegeleiders. Om hiervan gebruik te maken, moeten we wel zorgen dat het gas niet kan stromen, anders wordt de zogenaamde convectie overheersend. Hierop berust de werking van veel isolatiematerialen, zoals glaswol, waarvoor $\lambda = 0,038 \text{ W/mK}$.

Tabel 9.01 Warmtegeleidingscoëfficiënten van enkele stoffen in $\text{W/m}\cdot\text{K}$

metalen	λ	Vloeistoffen	λ	keramische materialen	λ	kunststoffen	λ	isolatiematerialen	λ	gassen	λ
ijzer	73	Ethanol		glas	0,78	HDPE	0,35	glaswol	0,038	lucht	0,024
staal (1 % C)	43	Water	0,56	marmer	2,50	LDPE	0,45	steenwol	0,040	CO ₂	0,015
r.v.-staal	19	IJs		zandsteen	1,83	PP	0,20	PS-schuim	0,027		
zilver	410					PS	0,16	pur-schuim	0,032		
koper	380					ABS	0,16	UF-schuim	0,035		
aluminium	220					PVC	0,29	glas-schuim	0,055		
messing	110					POM	0,29	kurk	0,042		
						PA-6	0,25				
						PC	0,21				
						PETP	0,24				

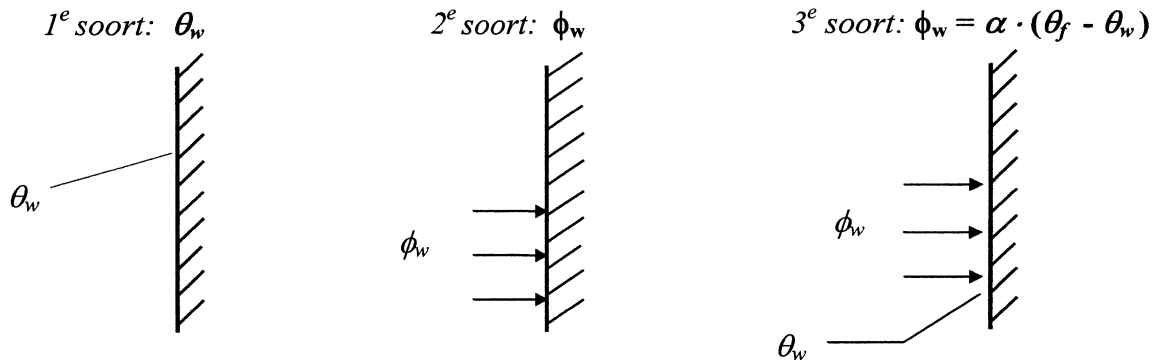
9.2 De randvoorwaarden

De oplossing van de differentiaalvergelijking voor de warmtegeleiding, zoals bijvoorbeeld formule (9.05) voor het eindimensionale geval, kan niet eenduidig opgelost worden zonder randvoorwaarden te stellen. We kennen voor de warmtegeleiding drie soorten randvoorwaarden:

randvoorwaarden van de 1^e soort: de temperatuur op een wand is voorgeschreven;

randvoorwaarden van de 2^e soort: de warmtestroomdichtheid door een wand is gegeven;

randvoorwaarden van de 3^e soort: de warmtestroomdichtheid door een begrensd oppervlak is evenredig met het temperatuurverschil tussen dit oppervlak en de omgeving; deze randvoorwaarde is een model voor de warmte-overdracht tussen een vaste wand en een fluïdum en wordt daarom ook wel de **convectieve** randvoorwaarde genoemd.

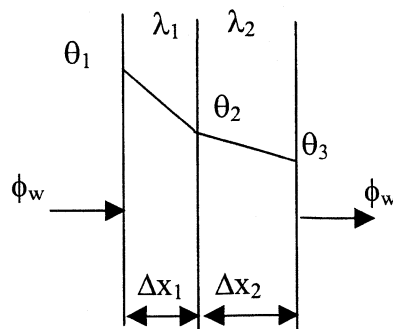


Figuur 9.04 : Randvoorwaarden

9.3 Ééndimensionale stationaire warmtegeleiding zonder warmteproductie

We spreken over ééndimensionale warmtegeleiding als de temperatuur maar van één plaatscoördinaat afhankelijk is. Behalve vlakke wanden vallen dus ook cilinders en bollen met radiaalsymmetrische temperatuurverdeling hieronder. We zullen hier alleen het geval van de vlakke wand bekijken.

In figuur 9.05 is een uit twee lagen bestaande vlakke wand getekend. Gegeven zijn de temperaturen θ_1 en θ_3 . Dit is dus een randvoorwaarde van de eerste soort.



Figuur 9.05 Warmtegeleiding door een vlakke wand opgebouwd uit twee lagen

We zoeken de warmtestroomdichtheid ϕ_w . Volgens formule (9.02) vinden we voor:

$$\text{Laag 1: } \phi_w = \lambda_1 \frac{\theta_1 - \theta_2}{\Delta x_1} \quad \text{of} \quad \theta_1 - \theta_2 = \frac{\Delta x_1}{\lambda_1} \phi_w \quad (9.06)$$

$$\text{Laag 2: } \phi_w = \lambda_2 \frac{\theta_2 - \theta_3}{\Delta x_2} \quad \text{of} \quad \theta_2 - \theta_3 = \frac{\Delta x_2}{\lambda_2} \phi_w \quad (9.07)$$

De uitdrukking voor ϕ_w wordt:

$$\phi_w = \frac{\theta_1 - \theta_3}{\frac{\Delta x_1}{\lambda_1} + \frac{\Delta x_2}{\lambda_2}} \quad (9.08)$$

De noemer van deze uitdrukking is eenvoudig te bepalen door gebruik te maken van de zogenaamde **specifieke thermische weerstand: r_{th}** .

De specifieke **thermische weerstand: r_{th}** geeft direct het verband aan tussen de warmtestroomdichtheid en het relevante temperatuurverschil:

$$\phi_w = \frac{(\theta_1 - \theta_3)}{r_{th}} \quad (9.09)$$

Waarbij:

$$r_{th} = \frac{\Delta x_1}{\lambda_1} + \frac{\Delta x_2}{\lambda_2} \quad (9.10)$$

Bij meer lagen (n stuks) geldt:

$$r_{th} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{\lambda_i} \quad (9.11)$$

Voor de specifieke thermische weerstand r_{th} geldt:

$$\phi_w = \frac{\Delta \theta}{r_{th}} \quad \rightarrow \quad r_{th} = \frac{\Delta \theta}{\phi_w} \quad (9.12)$$

en voor de totale thermische weerstand geldt:

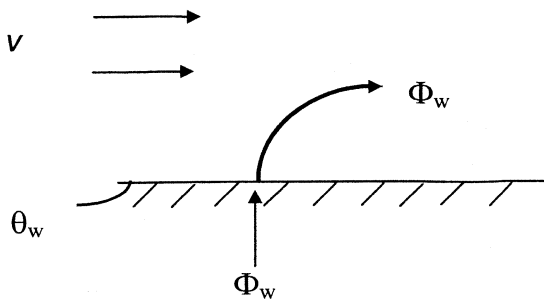
$$\Phi_w = \frac{\Delta \theta}{R_{th}} \quad \rightarrow \quad R_{th} = \frac{\Delta \theta}{\Phi_w} \quad (9.13)$$

Aangezien:

$$\Phi_w = A \cdot \phi_w \quad \rightarrow \quad R_{th} = \frac{r_{th}}{A} \quad (9.14)$$

9.4 Convectie

De warmte die door geleiding naar een oppervlak getransporteerd is, wordt veelal door **convectie** afgevoerd. In figuur 9.06 is er een stroming langs het vlak die de warmte meeneemt. Dit noemen we **gedwongen convectie**.

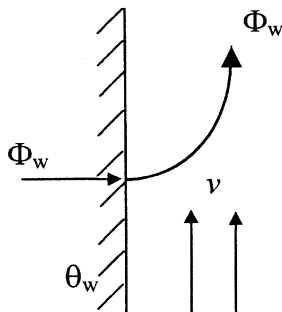


Figuur 9.06 *Gedwongen convectie*

Het is ook mogelijk dat er geen opgelegde stroming is. Dan ontstaat door de plaatselijke verwarming van het fluïdum vanzelf een stroming, die de warmte convectief afvoert, zie figuur 9.07. Dit heet **vrije convectie**. We kennen de voorbeelden uit het dagelijks leven: stijgende lucht boven een kachel of radiator, kringstromingen in water dat in een pan verwarmd wordt, enzovoort.

Newton stelde de convectieve warmte-overdracht evenredig met het temperatuurverschil tussen de wand en het fluïdum ver van de wand. De **afkoelingswet van Newton**, waarin de convectieve warmte-overdracht evenredig wordt gesteld met het temperatuurverschil tussen de wand en het fluïdum ver van de wand, is als volgt geformuleerd:

$$\phi_w = \alpha \cdot (\theta_w - \theta_f) \quad (9.15)$$



Figuur 9.07 *Vrije convectie*

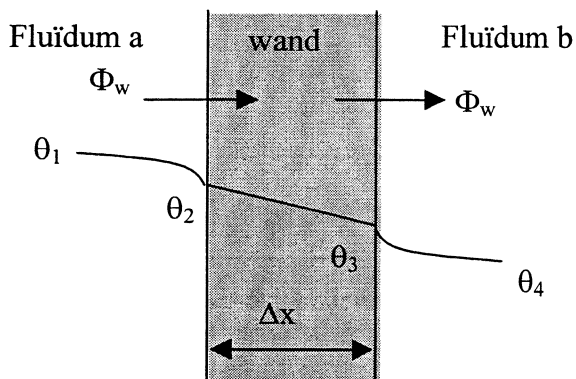
- α is de evenredigheidsconstante en heet de **warmte-overdrachtscoëfficiënt**;
- θ_w is de temperatuur van de wand;
- θ_f die van het fluïdum.

De waarde van α hangt niet alleen af van de eigenschappen van de wand en het fluïdum, maar ook van de stromingstoestand ter plaatse. Meestal rekenen we dan met een over het oppervlak gemiddelde α . Per oppervlak zal α dus plaatselijk kunnen verschillen, het is geen materiaalconstante. Waarden voor α moeten voor iedere stromingsconfiguratie experimenteel bepaald worden, in het volgende hoofdstuk wordt hier nog op teruggekomen. Ook θ_f in formule (9.15) is niet zonder meer een duidelijke grootte.

Voor een lichaam in een vrije omgeving lijkt de omgevingstemperatuur een geschikte keuze. Wat echter te doen bij de warmte-afgifte van een pijpwand naar de stroming in de pijp? We zouden bijvoorbeeld de temperatuur in het midden van de pijp kunnen nemen of een soort gemiddelde temperatuur in de pijp. Ook hier komen we in het volgende hoofdstuk op terug. In de volgende paragrafen beschouwen we α als een gegeven constante. Dit zijn dus problemen met randvoorwaarden van de derde soort.

9.5 Vlakke wand met fluïda aan beide zijden

In figuur 9.08 is de situatie geschetst met het temperatuurverloop.



Figuur 9.08 *Temperatuurverloop door een wand tussen twee fluïda.*

We zoeken de warmtestroomdichtheid ϕ_w bij gegeven θ_1 en θ_4 .

fluïdum a - wand:

$$\phi_w = \alpha_{12}(\theta_1 - \theta_2) \quad (9.16)$$

geleiding wand:

$$\phi_w = \lambda \frac{\theta_2 - \theta_3}{\Delta x} \quad (9.17)$$

wand - fluïdum b:

$$\phi_w = \alpha_{34} \cdot (\theta_3 - \theta_4) \quad (9.18)$$

Even rekenen leidt tot:

$$\phi_w = \frac{\theta_1 - \theta_4}{\frac{1}{\alpha_{12}} + \frac{\Delta x}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{34}}} \quad (9.19)$$

$$\phi_w = \frac{\theta_1 - \theta_4}{r_{th}} \quad (9.20)$$

In de bovenstaande formule staat de term r_{th} voor de **specifieke thermische weerstand**.
Voor de **thermische weerstand** R_{th} kan geschreven worden:

$$\Phi_w = \frac{\theta_1 - \theta_4}{R_{th}} \quad (9.21)$$

Rekenvoorbeeld 9.a:

Gegevens:

de temperatuur van rookgassen in een verwarmingsketel is 800 °C;
de temperatuur van het water is 60°C;
de dikte van de wand, die als vlak mag worden beschouwd, is 0,5 cm;
de warmtegeleidingscoëfficiënt $\lambda = 40 \text{ W/m}\cdot\text{K}$;
de warmte-overdrachtscoëfficiënt van de wand naar het water is $\alpha_u = 4.000 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$;
de warmte-overdrachtscoëfficiënt van het gas naar de wand is $\alpha_i = 400 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$.

Gevraagd:

Hoe hoog zijn de wandtemperaturen aan binnen- en buitenzijde?

Oplossing:

Voor de warmtestroom geldt formule 9.19, waarin θ_1 de temperatuur van de gassen is en θ_4 de temperatuur van het koelwater. Invullen levert een warmtestroom:

$$r_{th} = \frac{1}{\alpha_{12}} + \frac{\Delta x}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{34}} = \frac{1}{400} + \frac{0,005}{40} + \frac{1}{4000} = 0,0025 + 0,000125 + 0,00025 = 0,002875 \text{ m}^2\text{K/W}$$

$$\phi_w = \frac{\theta_1 - \theta_4}{r_{th}} = \frac{800 - 60}{0,002875} = 2,57 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$$

De formule van de warmtestroom van het gas naar de wand is:

$$\phi_w = \alpha_i (\theta_1 - \theta_2) = 400 \cdot (800 - \theta_2) = 2,57 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$$

Hieruit volgt dat: $\theta_2 = 157 \text{ }^\circ\text{C}$

De formule van de warmtestroom van de wand naar het koelwater is:

$$\phi_w = \alpha_u (\theta_3 - \theta_4) = 4000 \cdot (\theta_3 - 60) = 2,57 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$$

Hieruit volgt dat $\theta_3 = 124 \text{ }^\circ\text{C}$

9.6 Warmte-overdracht door straling

De derde manier waarop warmte overgedragen kan worden, is door middel van **straling**. Ieder lichaam dat een temperatuur boven het absolute nulpunt heeft, zendt elektromagnetische straling uit. Deze temperatuurstraling heeft alleen te maken met de temperatuur van het lichaam en de aard van de stof.

De temperatuurstraling speelt bij veel warmte-overdrachtsproblemen een grote rol; als voorbeeld noemen wij de open haard, de barbecue, de radiator van een centrale verwarming en de koeling van vermogenstransistoren. In tegenstelling tot convector is de straling naar iedere richting gelijk. Bij een open vuur is de warmte die naast het vuur gevoeld wordt, voornamelijk afkomstig van de straling, als men erboven gaat hangen, voelt dit veel warmer aan, omdat naast de straling die gevoeld wordt, ook warmte gevoeld wordt die overgedragen wordt door convector.

Berekeningen zijn exact mogelijk voor "zwarte lichamen", dat zijn lichamen die alle straling die hen treft, absorberen. Hiervoor kan het vermogen dat de straler eenzijdig uitzendt (dus in de halve ruimte) worden berekend.

We gebruiken de wet van **Stefan-Boltzmann**:

De wet van Stefan-Boltzmann is als volgt geformuleerd:

$$\Phi_w = \sigma \cdot A \cdot T^4 \quad (9.22)$$

Φ_w is het vermogen (de warmtestroom), σ is de constante van Stefan-Boltzmann, die gelijk is aan $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$, A het oppervlak van de straler en T de **absolute temperatuur**. Bij gebruik van formule (9.22) moet er wel bedacht worden dat het stralende oppervlak A zelf weer straling uit de omgeving, die doorgaans een andere temperatuur heeft, ontvangt.

Is de omgevingstemperatuur homogeen en gedraagt de omgeving zichzelf "zwart", hetgeen vaak voorkomt, dan wordt er geschreven:

$$\Phi_w = \sigma \cdot A \cdot (T^4 - T_0^4) \quad (9.23)$$

De meeste materialen zijn geen zwarte stralers, met name metalen. Hun emissie kan vaak goed beschreven worden door in plaats van formule (9.23) te schrijven:

$$\Phi_w = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot (T^4 - T_0^4) \quad (9.24)$$

Hierin is ε de zogenaamde **emissiecoëfficiënt**, die ligt tussen 0 (perfecte spiegel) en 1 (zwarte straler). In tabel 9.02 is van enkele materialen gegeven.

Tabel 9.02 De emissiecoëfficiënt van enkele metalen.

materiaal	ε	materiaal	ε
goud	0,02	glas	0,94
zilver	0,02	papier	0,92
koper (gepolijst)	0,03	kunststoffen	0,70 - 0,90
koper (geoxideerd)	0,75	ijs, water	0,95 - 0,98
aluminium walsblank	0,04	diverse lakken	0,85 - 0,95
ijzer blank	0,24	radiatorlak, wit	0,93
ijzer roestig	0,85	radiatorlak, zwart	0,93

Het valt op dat de witte, zowel als de zwarte radiatorlak zich vrijwel "zwart" gedragen. De warmte-overdracht door straling kan dus niet beïnvloed worden door een geschikte keus van de kleur, zoals wel eens gedacht wordt. Water en ijs, die in het smalle zichtbare gebied nauwelijks absorberen, stralen toch "zwart". Dat komt doordat hun absorptie in het infrarode gebied enorm is.

De formule (9.24) voor straling in de ruimte is uit te breiden tot de straling van een oppervlak A_1 met temperatuur T_1 naar een oppervlak A_2 met temperatuur T_2 . De formule wordt dan:

$$\Phi_w = \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) \cdot A_1/A_2} \cdot \sigma \cdot A_1 \cdot (T_1^4 - T_2^4) \quad (9.25)$$

waarin:

$$\frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) \cdot A_1/A_2} \cdot \sigma = C \quad (9.26)$$

Voor $A_1 \rightarrow \infty$ (oneindige ruimte) wordt $C = \varepsilon_1 \cdot \sigma$ en vinden we formule (9.24) weer terug.

Rekenvoorbeeld 9.b Warmte-overdracht door straling in een broodrooster:

In een broodrooster wordt een boterham geplaatst van 10 °C en deze is voldoende bruin als de temperatuur van het brood 150 °C is. Tijdens het opwarmen van het brood verdampt het water uit de boterham.

Gegevens:

Constante van Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

gootheden	gloeidraad	brood	water
Emissiecoëfficiënten:	$\epsilon_{gl} = 0,6$	$\epsilon_{br} = 0,85$	
Soortelijke warmten:		$c_{br} = 200 \text{ J}/\text{kg} \cdot \text{K}$	$c_w = 4200 \text{ J}/\text{kg} \cdot \text{K}$
Verdampingswarmte			$L_{v,w} = 455 \text{ kJ}/\text{kg}$
Oppervlakken:	$A_{gl} = 0,009 \text{ m}^2$	$A_{br} = 0,024 \text{ m}^2$	
Begintemperaturen:	$\theta_{gl} = 700 \text{ °C}$	$\theta_{begin} = 10 \text{ °C}$	$\theta_{begin} = 10 \text{ °C}$
Eindtemperaturen:	$\theta_{gl} = 700 \text{ °C}$	$\theta_{eind} = 150 \text{ °C}$	$\theta_{kookpunt} = 100 \text{ °C}$
Massa's		$m_{br} = 30 \text{ gram}$	$m_w = 5 \text{ gram}$

Gevraagd:

De waarde van de term C in de vergelijking voor de warmtestroom

De warmtestroom Φ naar de boterham

De hoeveelheid warmte die nodig is om de temperatuur van de boterham op 150 °C te brengen en het water uit de boterham te laten verdampen.

Oplossing:

$$C = 3,272 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$$

$$\Phi_{wb} = 262,1 \text{ W}$$

$$\Phi_{we} = 254,5 \text{ W}$$

Totale benodigde warmte:

Opwarmen van water tot 100 °C	$Q = 4200 \cdot 5 \cdot 10^{-3} (100-10)$	= 1,89 kJ
Verdampen van water	$Q = 455 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}$	= 2,28 kJ
Opwarmen boterham	$Q = 200 \cdot 30 \cdot 10^{-3} (150-10)$	= 0,84 kJ +
	Q_{totaal}	= 5,00 kJ

9.8 Samenvatting

Er zijn 3 typen warmtetransport:

warmtegeleiding;
convectie;
straling;

De **warmtestroom** Φ_w door een oppervlak A is:

$$\Phi_w = \lambda \cdot A \cdot \frac{\theta_1 - \theta_0}{\Delta x}$$

De **warmtestroomdichtheid** ϕ_w is gedefinieerd als de warmtestroom per oppervlakte-eenheid.

$$\phi_w = \lambda \cdot \frac{\theta_1 - \theta_0}{\Delta x}$$

De **thermische weerstand** R_{th} geeft direct het verband aan tussen de warmtestroom en het relevante temperatuurverschil:

$$\Phi_w = \frac{\theta_1 - \theta_0}{R_{th}}$$

De **specifieke thermische weerstand** r_{th} geeft direct het verband aan tussen de warmtestroomdichtheid ϕ_w en het relevante temperatuurverschil:

$$\phi_w = \frac{(\theta_1 - \theta_0)}{r_{th}}$$

Voor een vlakke wand is de specifieke thermische weerstand r_{th} :

$$r_{th} = \frac{\Delta x}{\lambda}$$

De specifieke thermische weerstand r_{th} tussen een vaste wand en een fluïdum is:

$$r_{th} = \frac{1}{\alpha}$$

Voor **convectieve warmte-overdracht** geldt de **afkoelingswet van Newton**:

$$\phi_w = \alpha \cdot (\theta_w - \theta_f)$$

Voor een zwarte straler, die eenzijdig straalt geldt de **wet van Stefan-Boltzmann**:

$$\Phi_w = \sigma \cdot A \cdot T^4$$

Voor een niet “zwarte straler” die naar een even groot voorwerp straalt met een emissiecoëfficiënt ε , geldt:

$$\Phi_w = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot (T^4 - T_0^4)$$

9.9 Oefenopgaven

9.9.1 Vrieskist

Een vrieskist waarin de temperatuur op -25°C wordt geregeld, wordt in een ruimte met een temperatuur van $+25^{\circ}\text{C}$ opgesteld. Er moet worden nagegaan hoe door keuze van het materiaal en de wanddikte, thermische verliezen verminderd kunnen worden

Gegeven:

warmtegeleidingscoëfficiënt: λ_1	=	0.1	W/mC
wanddikte: Δx_1	=	10	mm
oppervlak: A	=	5	m^2
temperatuur 1 ($x = 0$): θ_1	=	25	$^{\circ}\text{C}$
temperatuur 2 ($x = \Delta x$): θ_2	=	-25	$^{\circ}\text{C}$

Gevraagd:

bereken de temperatuurgradiënt: $\text{grad}(\theta)$;

bereken de warmtestroomdichtheid: ϕ_{w1} ;

bereken de warmtestroom door het oppervlak: Φ_{w1}

Stel dat de warmtestroom te hoog is en er isolatiemateriaal met de onderstaande eigenschappen wordt toegevoegd:

warmtegeleidingscoëfficiënt: λ_2	=	0.01	W/(m·K);
wanddikte: Δx_2	=	25	mm;
temperatuur:3 θ_3	=	-25	$^{\circ}\text{C}$;

Bereken de warmtestroomdichtheid ϕ_{w2} van het nieuwe systeem.

Bereken de warmtestroom Φ_{w2} van het nieuwe systeem.

Bereken de temperatuur θ_2 van de wand van de vrieskist waaraan het isolatiemateriaal zit.

9.9.2 Conductief en convectief warmtetransport

Een heetwatertoestel is gasgestookt en voor de warmteoverdracht van de gasvlam naar het water zijn de onderstaande waarden gegeven.

- Warmteoverdrachtscoëfficiënt. (gasvlam - pijp) α_{gp} = 100 W/m²°C
- dikte van de pijpwand t_{wand} = 0.001 m
- warmtegeleidingscoëfficiënt v.d pijpwand λ = 40 W/m°C
- warmteoverdrachtscoëf. (pijp - water) α_{pw} = 1000 W/m²°C

Gevraagd:

- a. De totale specifieke thermische weerstand.
- b. Waardoor wordt de warmtestroomdichtheid het sterkst beperkt?

9.9.3 Warmteoverdracht door straling tussen 2 concentrische cilinders

In een holle cilinder[2] is concentrisch een inwendige cilinder[1] aangebracht. Doordat de temperatuur van de inwendige cilinder hoger is dan die van de buitenste, wordt door straling warmte getransporteerd van cilinder [1] naar cilinder[2].

Gegeven:

Constante van Stefan-Boltzmann: $\sigma = 56,69 \cdot 10^{-9} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

grootheden:	cilinder 1	cilinder 2
emissiecoëfficiënten:	$\varepsilon_1 = 1,000$	$\varepsilon = 0,5000$
diameters:	$d_1 = 1,000 \text{ cm}$	$d_2 = 10,00 \text{ cm}$
wandtemperaturen:	$\theta_1 = 500,0 \text{ }^\circ\text{C}$	$\theta_2 = 100,0 \text{ }^\circ\text{C}$

vereiste warmtestroom: $\Phi_w = 500,0 \text{ W}$

Gevraagd:

de benodigde lengte L_1 van de cilinders voor de vereiste warmtestroom.

10 Warmte-overdracht tussen een wand en een fluïdum

In dit hoofdstuk worden de volgende **onderwerpen** behandeld:

- **mengtemperatuur** θ_m ;
- **warmte-overdrachtscoëfficiënt** α ;
- kengetal van **Nusselt** Nu ;
- kengetal van **Prantl** Pr ;
- formule van **Dittus en Boelter**;
- warmte-overdracht in ronde buizen
- warmte-overdracht naar omstroomde lichamen

10.1 De derde randvoorwaarde (convectie $\rightarrow \alpha$)

In hoofdstuk 9 is de *convectieve warmte-overdracht* van een wand naar een fluïdum aangeduid. Volgens de hechtvoorwaarde is de snelheid van het fluïdum aan de wand nul en warmte wordt dus via *geleiding* door het fluïdum af- of toegevoerd.

Experimenteel is vastgesteld dat de temperatuur van het fluïdum dat aan de wand grenst gelijk is aan de wandtemperatuur. We zouden dus een model kunnen proberen met een stilstaand laagje fluïdum langs de wand. We moeten dan wel het temperatuurverschil over dit laagje weten, en deze wordt bepaald door de stroming, die ervoor zorgt dat de warmte af- of toegevoerd wordt. Deze bepaalt de temperatuur in het dunne laagje fluïdum. Dit soort problemen zijn vrij ingewikkeld. Een praktische benadering is: "De warmte-overdracht te beschrijven met de **afkoelingswet van Newton**" (9.13).

De afkoelingswet van Newton is geformuleerd als:

$$\phi_w = \alpha \cdot (\theta_w - \theta_f) \quad (10.1)$$

waarin:

ϕ_w = de plaatselijke warmtestroomdichtheid door de wand [W/m^2]

α = de **warmte-overdrachtscoëfficiënt** [$\text{W}/\text{m}^2\text{K}$]

θ_w = de temperatuur van de wand [K]

θ_f = een **karakteristieke temperatuur** van het fluïdum [K]

Alle *moeilijkheden zijn nu verschoven naar het bepalen van α* . Voor betrekkelijk eenvoudige gevallen, zoals de laminaire buisstroming en de laminaire grenslaag zijn, mathematisch nogal ingewikkelde, berekeningen mogelijk. Zodra de stroming turbulent wordt, is dit haast ondoenlijk.

Voor technische berekeningen moeten we daarom gebruik maken van experimentele resultaten en in tabel 10.1 zijn enige warmte-overdrachtscoëfficiënten gegeven.

tabel 10.1 *Waarden van de warmte-overdrachtscoëfficiënt α voor lucht en water, bij verschillende fluïdumsnelheden*

vrije convectie in lucht:	$\alpha = 5 - 25 \quad \text{W}/\text{m}^2\text{K}$
gedwongen convectie in lucht:	$\alpha = 10 - 500 \quad \text{W}/\text{m}^2\text{K}$
gedwongen convectie in water:	$\alpha = 100 - 15.000 \quad \text{W}/\text{m}^2\text{K}$
kokend water:	$\alpha = 2.500 - 15.000 \quad \text{W}/\text{m}^2\text{K}$

In tabel 10.1 is duidelijk te zien, dat de snelheid van het fluïdum en/of de beweging ervan, zoals bij kokend water, een grote invloed heeft op de warmte-overdrachtscoëfficiënt.

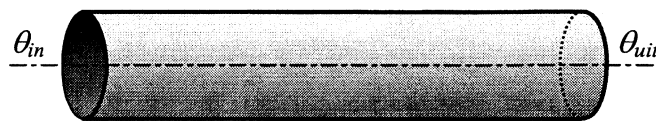
De warmte-overdrachtscoëfficiënt is voor lucht (een gas) naar een wand geringer dan voor water (een vloeistof).

In Hoofdstuk 2 is al vermeld dat de *warmte-overdracht bij turbulente stromingen* hoger is dan bij *laminaire stromingen* en in dit hoofdstuk worden formules gegeven, waarmee de warmte-overdrachtscoëfficiënt α kan worden bepaald.

10.2 De mengtemperatuur

In formule (10.1) komt een fluïdumtemperatuur θ_f voor. Een praktisch goed bruikbare (karakteristieke) waarde hiervoor is de zogenaamde "**mengtemperatuur**": θ_m . Dat is de temperatuur die we zouden vinden als we het fluïdum in de betreffende doorsnede in een reservoir op zouden vangen en zonder warmteverlies in thermisch evenwicht laten komen.

$$\theta_m = \frac{\theta_{in} + \theta_{uit}}{2} \quad (10.2)$$



figuur 10.1 Een pijp met doorstromend fluïdum

Rekenvoorbeeld 10.a

Toelichting: Bepaling van de mengtemperatuur θ_m voor vloeistof in een buis.

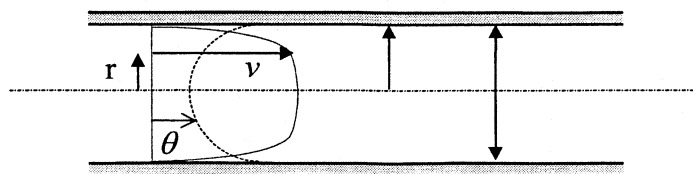
Gegevens: temperatuur ingaande vloeistof: $\theta_{in} = 10^\circ\text{C}$
 temperatuur uitgaande vloeistof: $\theta_{uit} = 50^\circ\text{C}$

Gevraagd: de mengtemperatuur θ_m

Oplossing: $\theta_m = \frac{\theta_{in} + \theta_{uit}}{2} = \frac{10 + 50}{2} = 30^\circ\text{C}$

10.3 Het kengetal van Nusselt

In figuur 10.1 zijn de snelheids- en de temperatuurverdeling in een pijpdoorsnede aangegeven, doordat het fluïdum aan de pijpwand een hogere temperatuur heeft dan in het midden, is te concluderen dat het fluïdum verwarmd wordt.



figuur 10.2 De snelheids- en temperatuurverdeling in een pijpdoorsnede

Formule (10.1) wordt in termen van de mengtemperatuur θ_m :

$$\phi_w = \alpha \cdot (\theta_w - \theta_m) \quad (10.3)$$

Empirische waarden van α moeten dus op dit temperatuurverschil ($\theta_w - \theta_m$) betrokken zijn.

Er geldt dat in het fluïdumlaagje vlak bij de wand zuivere warmtegeleiding optreedt:

$$\phi_w = \lambda \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (10.4)$$

Uit (10.3) en (10.4) volgt de betrekking:

$$\frac{\alpha}{\lambda_{vl}} = \frac{\left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=R}}{\theta_w - \theta_m} \quad (10.5)$$

Door het linker- en het rechterlid van vergelijking (10.5) te vermenigvuldigen met de buisdiameter D , ontstaan dimensieloze groepen. Het kengetal van Nusselt Nu is gelijk aan het linkerlid.

Het kengetal van Nusselt Nu is een dimensieloze maat voor α :

$$Nu = \frac{\alpha \cdot D}{\lambda} = \frac{\phi_w \cdot D}{(\theta_w - \theta_m) \cdot \lambda_{vl}} \quad (10.6)$$

Rekenvoorbeeld 10.b:

Toelichting: Bepaling van de warmte-overdrachtscoëfficiënt α voor water in een buis.

Gegevens: het getal van Nusselt: $Nu = 100$
 de pijpdiameter: $D = 30 \text{ mm}$
 de warmtegeleidingscoëfficiënt: $\lambda_{\text{water}} = 0,56 \text{ W/m}\cdot\text{K}$

Gevraagd: de warmte-overdrachtscoëfficiënt α

Oplossing: $Nu = \frac{\alpha \cdot D}{\lambda} \rightarrow \alpha = \frac{\lambda}{D} \cdot Nu \rightarrow \alpha = \frac{0,56}{0,03} \cdot 100 = 1867 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$

Rekenvoorbeeld 10.c:

Toelichting: Een koperen leiding is op een door verbrandingsgassen verwarmde plaat gesoldeerd. Door de leiding stroomt water en dit zal in temperatuur stijgen t.g.v. de verwarming. De gastoevoer is zodanig afgesteld dat de temperatuur van de plaat en de leiding constant blijven.

Gegevens:

leidingdiameter	D	=	40	mm
warmtegeleidingscoëfficiënt	λ_{water}	=	0,60	W/m·K
inlaattemperatuur v/h water	θ_{in}	=	60	°C
temperatuur van de wand	θ_w	=	70	°C
warmtestroomdichtheid	ϕ_w	=	150	W/m ²
getal van Nusselt	Nu	=	2	

Gevraagd: De temperatuur van het uitstromende water

Oplossing: 1. Bepaal het getal van de mengtemperatuur als functie van de bekenden

$$Nu = \frac{\phi_w \cdot D}{(\theta_w - \theta_m) \cdot \lambda_{\text{vl}}} \quad (10.6) \Rightarrow \theta_m = \theta_w - \frac{\phi_w \cdot D}{\lambda_{\text{water}} \cdot Nu}$$

$$\theta_m = 70 - \frac{150 \cdot 0,04}{0,60 \cdot 2} = 65 \text{ °C}$$

2. Bepaal de temperatuur van het uitstromende water

$$\theta_m = \frac{\theta_{\text{in}} + \theta_{\text{uit}}}{2} \quad (10.2) \Rightarrow \theta_{\text{uit}} = 2 \cdot \theta_m - \theta_{\text{in}}$$

$$\theta_{\text{uit}} = 2 \cdot 65 - 60 = 70 \text{ °C}$$

Rekenvoorbeeld 10.d:

Toelichting: Door een pijp stroomt water. Dit wordt via de wand van de pijp opgewarmd.

Gegevens:

warmte-overgangscoëfficiënt	α	=	500	W/m ² ·K
warmtestroom door de wand	Φ_w	=	4000	W
volumestroom door de pijp	Φ_v	=	3	liter/min
pijpdiameter	D	=	50	mm
inlaattemperatuur	θ_{in}	=	20	°C
uitstroomtemperatuur	θ_{uit}	=	40	°C

Gevraagd: De lengte van de pijp die nodig is om een uitstroomtemperatuur van 40 °C te bereiken.

Oplossing: 1. Bereken de mengtemperatuur

$$\theta_m = \frac{\theta_{\text{in}} + \theta_{\text{uit}}}{2} = \frac{20 + 40}{2} = 30 \text{ °C}$$

2. Bepaal de uitdrukking voor de convectieve warmtestroomdichtheid

$$\phi_{w,\text{conv}} = \alpha \cdot (\theta_{\text{uit}} - \theta_m) = 500 \cdot (40 - 30) = 5000 \text{ W/m}^2$$

3. Bereken de benodigde lengte van de pijp

$$L_{\text{pijp}} = \frac{\Phi_w}{\phi_{w,\text{conv}} \cdot \pi \cdot D} = \frac{4000}{5000 \cdot \pi \cdot 0,05} = 5,09 \text{ m}$$

10.4 De afhankelijkheid van de warmte-overdrachtscoëfficiënt van de stroming en de thermische eigenschappen van het fluïdum.

Dimensie-analyse is een combinatie van theoretische beschouwingen en experimentele resultaten. Hiermee kunnen relevante kengetallen voor een bepaald fysisch verschijnsel worden opgesteld. Uit experimenten kunnen dan relaties worden gevonden die in een geldigheidsgebied, relatief eenvoudige formules opleveren.

De essentie van dimensie-analyse is dat:

- alle relevante fysische en geometrische **invloedsgrootheden** bepaald worden;
- er door combineren van deze fysische en geometrische grootheden, **dimensieloze groepen** gegenereerd worden;
- de **relevante groepen** voor een verschijnsel als **kengetal** genomen worden;
- er naar **relaties tussen de kengetallen** wordt gezocht en er theoretische beschouwingen en experimentele resultaten gebruikt worden voor de functie tussen de kengetallen;

Als voorbeeld voor de relatie tussen kengetallen wordt een algemene uitdrukking voor het getal van Nusselt Nu , waarmee de warmte-overdrachtscoëfficiënt α kan worden bepaald als functie van het kengetal van Reynolds Re en het kengetal van Prandtl – dat verderop wordt behandeld

$$Nu = C \cdot Re^m \cdot Pr^n \quad (10.7)$$

De warmte-overdrachtscoëfficiënt α komt voor in het kengetal van Nusselt, de stromingseigenschappen in het kengetal van Reynolds en de niet-stationaire thermische eigenschappen in het kengetal van Prandtl.

Het kengetal van Prandtl bevat zowel stromingseigenschappen, als thermische eigenschappen.

Het kengetal van **Prandtl** is:

$$Pr = \frac{\eta \cdot c}{\lambda} = \frac{\eta / \rho}{\lambda / \rho \cdot c} = \frac{\eta / \rho}{a} \quad (10.8)$$

De temperatuurvereffeningscoëfficiënt $a = \lambda / (\rho \cdot c)$ is een maat voor de verspreiding van warmte. Als $\rho \cdot c$ groot is, wordt de op moleculaire schaal doorgeleide warmte als inwendige energie goed opgenomen in het fluïdum en de warmte dringt dus niet snel door. Een waarde van $Pr > 1$ wil dus zeggen dat de warmte achterblijft ten opzichte van de impuls. Dit is het geval bij slecht geleidende viskeuze fluïda, zoals oliën.

Glycerine: $Pr \approx 10^4$ (sterk temperatuur afhankelijk)
 Water: $Pr \approx 7$ (sterk temperatuur afhankelijk)
 Lucht: $Pr \approx 0,7$ (zwak temperatuur afhankelijk)

Verder is de verhouding tussen de lengte L en de buisdiameter D ook van invloed op de warmte-overdracht bij laminaire stroming.

Tussen de **vier groepen** bestaat een verband zodat Nu een functie van Re , Pr , en L/D wordt:

$$Nu = f\left(Re, Pr, \frac{L}{D}\right) \quad (10.9)$$

Deze betrekking is algemeen geldig, zowel voor **laminaire als turbulente** stromingen.

10.5 Empirische formules voor de buisstroming

Het is haast ondoenlijk om, behoudens voor een volledig ontwikkelde laminaire stroming met constante wandtemperatuur, een analytische oplossing te bepalen voor de warmte-overdracht in een buisstroming. Daarom zijn formules opgesteld die berusten op empirische gegevens. Deze formules moeten wel in overeenstemming zijn met de resultaten van de dimensie-analyse. De dimensieloze coëfficiënten worden zodanig bepaald dat de formule zo goed mogelijk de experimentele resultaten weergeeft. Er zijn in de literatuur meerdere formules voorhanden.

10.5.1 Laminaire stroming

Voor het geval van een *constante wandtemperatuur* geldt:

$$Nu = 3,66 + \frac{0,057 \cdot Re \cdot Pr \cdot \frac{D}{L}}{1 + 0,04 \cdot \left(Re \cdot Pr \cdot \frac{D}{L} \right)^{0,8}} \quad (10.10)$$

10.5.2 Turbulente stroming

Voor een volledig ontwikkelde turbulente stroming wordt de "klassieke" formule van Dittus en Boelter gebruikt:

De formule van Dittus en Boelter ziet er als volgt uit:

$$Nu = 0,023 Re_D^{0,8} Pr^n \quad (10.11)$$

De fluïdumeigenschappen dienen te worden genomen bij de mengtemperatuur: $\theta_m = \frac{\theta_{in} + \theta_{uit}}{2}$.

voor koeling van het fluïdum geldt dat $n=0,3$;

voor verwarming van het fluïdum geldt dat $n = 0,4$.

Het geldigheidsbereik van deze formule is:

$10^4 < Re < 1,2 \cdot 10^5$. Extrapolatie is toegestaan.

$0,7 < Pr < 100$

$L/D > 60$

De formule heeft een verrassend groot bereik. Zijn nauwkeurigheid is ongeveer 10 % in het toepassingsgebied. Ook voor een niet cirkelvormige doorsnede van de buis voldoet deze formule nog redelijk.

Rekenvoorbeeld 10.e; warmte-overdracht naar te verwarmen water

Water stroomt door een buis, waarvan de temperatuur van de buiswand constant wordt gehouden. Er wordt nagegaan hoe groot de warmte-overdrachtscoëfficiënt α voor een laminaire stroming ($Re = 2\ 000$) en hoe groot deze is voor een turbulente stroming ($Re = 5\ 000$).

Gegevens:

Buisdiameter:	D_{buis}	=	13	mm
Wanddikte:	t_{buis}	=	1	mm
Buislengte:	L_{buis}	=	150	cm
Soortelijke massa van water:	ρ_{water}	=	1 000	kg/m ³
Dynamische viscositeit:	η_{water}	=	10^{-3}	Pa·s
Soortelijke warmte:	c_{water}	=	4,19	kJ/kg·K
Warmtegeleidingscoëfficiënt	λ_{water}	=	0,56	W/m·K
Het kengetal van Prandtl:	Pr	=	7,482	

a) laminaire stroming ($Re = 2\ 000$)

Het kengetal van Nusselt is

$$Nu = 3,66 + \frac{0,057 \cdot Re \cdot Pr \cdot \frac{D}{L}}{1 + 0,04 \cdot \left(Re \cdot Pr \cdot \frac{D}{L} \right)^{0,8}} = 3,66 + \frac{0,057 \cdot 2000 \cdot 7,482 \cdot \frac{0,013}{1,5}}{1 + 0,04 \cdot \left(2000 \cdot 7,482 \cdot \frac{0,013}{1,5} \right)^{0,8}} = 6,157$$

De warmte-overdrachtscoëfficiënt: $\alpha_{\text{lam}} = Nu \cdot \frac{\lambda_{\text{water}}}{D_{\text{buis}}} = 6,157 \cdot \frac{0,56}{0,013} = 265,2 \frac{W}{m^2 K}$

b) turbulente stroming ($Re = 5\ 000$)

Berekening van het kengetal van Nusselt met de formule van Dittus en Boelter

Het getal van Nusselt: $Nu = 0,023 \cdot Re_D^{0,8} Pr^n = 0,023 \cdot 5000^{0,8} \cdot 7,482^{0,4} = 46,83$

De warmte-overdrachtscoëfficiënt: $\alpha_{\text{turb}} = Nu \cdot \frac{\lambda_{\text{water}}}{D_{\text{buis}}} = 46,83 \cdot \frac{0,56}{0,013} = 2017,2 \frac{W}{m^2 K}$

Let op het grote verschil in de warmte-overdrachtscoëfficiënt van een turbulente en een

laminaire stroming: $\frac{\alpha_{\text{turb}}}{\alpha_{\text{lam}}} = \frac{2017}{265} \approx 7,5$

10.6 Warmte-overdracht bij cilinders

De warmtestroomdichtheid en de stroming variëren sterk over het oppervlak van een cilinder mede omdat de stroming loslaat (zie hoofdstuk 7)

De warmte-overdrachtscoëfficiënt bepaalt de mate waarin iemand de kou ervaart. Bij een hoge snelheid is de “gevoelstemperatuur” in de winter veel lager dan bij een lage windsnelheid.

De formule van Kramers geeft een redelijke gemiddelde waarde van de warmte-overdrachtscoëfficiënt voor een aangestroomde cilinder.

$$Nu = 0,42 \cdot Pr^{0,2} + 0,57 \cdot Re_D^{0,5} \cdot Pr^{0,33} \quad (10.12)$$

Rekenvoorbeeld 10.f; warmte-overdracht van een cilinder in een luchtstroom

Een cilinder is opgesteld in een luchtstroom, waarvan de luchtsnelheid gevarieerd kan worden. Bereken hoe groot de warmte-overdrachtscoëfficiënt α is voor een lage luchtsnelheid ($u_{laag} = 0,1$ m/s) en hoge luchtsnelheid ($u_{hoog} = 1,2$ m/s)

Gegevens:

Buisdiameter:	D_{buis}	=	20	cm
Soortelijke massa van lucht:	ρ_{lucht}	=	1,25	kg/m ³
Dynamische viscositeit:	η_{lucht}	=	$1,8 \cdot 10^{-5}$	Pa·s
Soortelijke warmte:	c_{lucht}	=	1,00	kJ/kg·K
Warmtegeleidingscoëfficiënt	λ_{lucht}	=	0,026	W/m·K

Berekeningen:

a) Het kengetal van Prandtl: $Pr = 0,692$

b) Warmte-overdracht bij een lage luchtsnelheid

Het getal van Reynolds Re is: $Re = \frac{D_{cil} \cdot u_{laag} \cdot \rho_{lucht}}{\eta_{lucht}} = \frac{0,20 \cdot 0,1 \cdot 1,25}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 1389$

Het kengetal van Nusselt Nu is: $Nu = 0,42 \cdot Pr^{0,2} + 0,57 \cdot Re_D^{0,5} \cdot Pr^{0,33}$
 $Nu = 0,428 \cdot 0,692^{0,2} + 0,57 \cdot 1389^{0,5} \cdot 0,692^{0,33} = 19,20$

De warmte-overdrachtscoëfficiënt: $\alpha_{lam} = Nu \cdot \frac{\lambda_{lucht}}{D_{buis}} = 19,20 \cdot \frac{0,026}{0,20} = 2,5 \frac{W}{m^2 K}$

c) Warmte-overdracht bij een hoge luchtsnelheid ($u_{lucht}=1,2$ m/s)

Het getal van Reynolds Re is: $Re = \frac{D_{cil} \cdot u_{hoog} \cdot \rho_{lucht}}{\eta_{lucht}} = \frac{0,20 \cdot 1,2 \cdot 1,25}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 16667$

Het kengetal van Nusselt Nu is: $Nu = 0,42 \cdot Pr^{0,2} + 0,57 \cdot Re_D^{0,5} \cdot Pr^{0,33}$
 $Nu = 0,428 \cdot 0,692^{0,2} + 0,57 \cdot 16667^{0,5} \cdot 0,692^{0,33} = 65,56$

De warmte-overdrachtscoëfficiënt: $\alpha_{lam} = Nu \cdot \frac{\lambda_{lucht}}{D_{buis}} = 65,56 \cdot \frac{0,026}{0,20} = 8,5 \frac{W}{m^2 K}$

10.7 Koelpennen en koelvinnen

10.7.1 Inleiding

Het *warmtetransport van een gas via een wand naar een vloeistof* wordt meestal beperkt door het *convectieve warmtetransport van het gas naar de wand*.

Rekenvoorbeeld 10.g

Toelichting: Een met water gevulde ketel wordt opgewarmd wordt door een gasbrander.

gegevens: warmte-overdrachtscoëfficiënt verbrandingsgas-wand: $\alpha_{12} = 30 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$
warmtegeleidingscoëfficiënt: $\lambda = 40 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$
wanddikte: $t_{\text{wand}} = 0,002 \text{ m}$
warmte-overdrachtscoëfficiënt wand-water: $\alpha_{23} = 1\,000 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$

de specifieke thermische weerstanden zijn:

verbrandingsgas-wand:	$r_{12} = 1/\alpha_{12} = 1/30 = 0,033 \text{ (K} \cdot \text{m}^2)/\text{W}$
geleiding wand:	$r_{\text{wand}} = t_{\text{wand}}/\lambda = 0,002/40 = 0,000\,05 \text{ (K} \cdot \text{m}^2)/\text{W}$
wand-water:	$r_{23} = 1/\alpha_{23} = 1/1000 = 0,001 \text{ (K} \cdot \text{m}^2)/\text{W}$
totale specifieke thermische weerstand:	$r_{\text{tot}} = 0,034\,05 \text{ (K} \cdot \text{m}^2)/\text{W}$

Uit het rekenvoorbeeld is te zien dat de hoge thermische weerstand (r_{12}) van het verbrandingsgas naar de wand voor het overgrote deel de totale specifieke thermische weerstand, bepaalt.

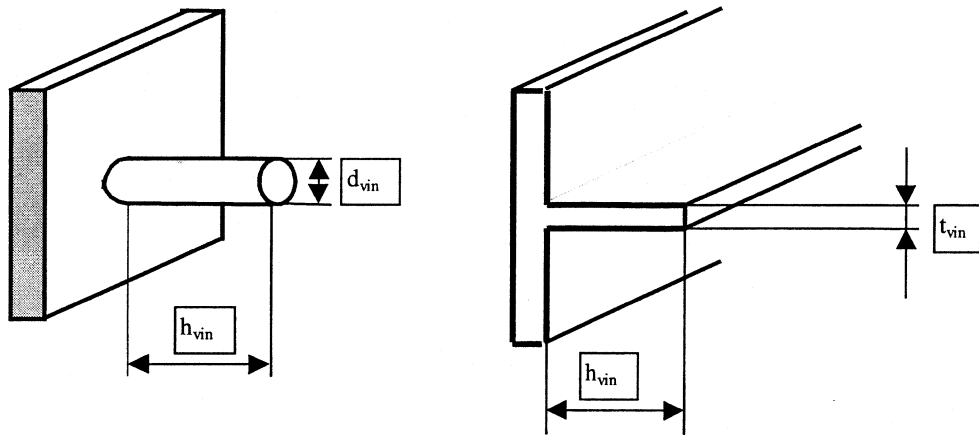
In hoofdstuk 9 zijn in paragraaf 9.3 de specifieke thermische weerstand r_{th} en de thermische weerstand R_{th} ingevoerd.

Een verlaging van de kritieke thermische weerstand R_{th} , in dit geval R_{12} , kan bereikt worden door:

een verhoging van α en/of
het WOO (Warmte Overdragend Oppervlak).

Verhoging van de warmte-overdrachtscoëfficiënt α is mogelijk door geforceerde convectie bij een hogere snelheid van het verbrandingsgas, maar dit kost veel energie en is niet erg efficiënt. Een efficiëntere verbetering kan worden bereikt door het aanbrengen van *uitsteeksels (oppervlaktevergroting)* op de wand aan de ‘moeilijke’ zijde. Deze kunnen de vorm hebben van *pennen of vinnen*. In figuur 10.3 zijn hiervan twee voorbeelden gegeven.

De mate waarin de warmte-overdracht wordt verbeterd hangt af van het vergrote oppervlak en de efficiency van de vin waarop in paragraaf 10.7.3 wordt teruggekomen.



figuur 10.3 Voorbeelden van een koelpen en een koelvin

Een voorbeeld van de vergroting van het warmte-overdragende-oppervlak **zonder vinnen** WOO_{zv} naar een warmte-overdragende-oppervlak met **vinnen** WOO_{mv} , wordt hierna gegeven.

Voor een **cilindrische pen** is de verhoging van het WOO_{mv} t.o.v. het WOO_{zv} :

$$\frac{WOO_{mv}}{WOO_{zv}} = \frac{\pi \cdot d_{pen} \cdot h_{pen}}{\pi/4 \cdot d_{pen}^2} = 4 \cdot \frac{h_{pen}}{d_{pen}} \quad (10.13)$$

en voor een pen met een $h_{pen} = 8$ mm en een pendikte $d_{pen} = 2$ mm wordt het WOO 16 maal zo groot.

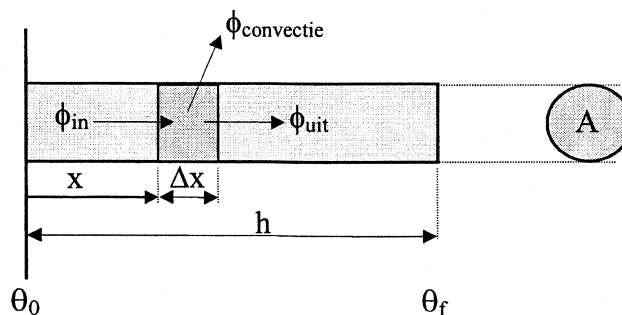
Voor een **vlakke vin** is de verhoging van het WOO_{mv} t.o.v. het WOO_{zv} :

$$\frac{WOO_{mv}}{WOO_{zv}} = \frac{2 \cdot h_{vin} \cdot L}{t_{vin} \cdot L} = 2 \cdot \frac{h_{vin}}{t_{vin}} \quad (10.14)$$

en voor een vin met een $h_{vin} = 8$ mm en een vindikte $t_{vin} = 2$ mm wordt het WOO 8 maal zo groot.

10.7.2 Cilindrische koelpen

In figuur 9.10 is een cilindrische koelpen getekend, die zich in een fluïdum bevindt. De temperatuur van het fluïdum is θ_f



figuur 10.4 Cilindrische koelpen in een fluïdum

De warmtebalans voor het stukje Δx in figuur 10.4 wordt voor de stationaire toestand:

$$\Phi_{in} = \Phi_{uit} + \Phi_{convectie} \quad (10.15)$$

We veronderstellen dat de temperatuur van de pen in iedere doorsnede gelijk is en θ_x is dus alleen afhankelijk van de x-coördinaat ($0 < x < h$). Dan wordt de balans:

$$\phi_{in} \cdot A = \phi_{uit} \cdot A + \phi_{convectie} \cdot s \cdot \Delta x \quad (10.16)$$

$$A \cdot \lambda \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \alpha \cdot s \cdot (\theta - \theta_f) = 0 \quad (10.17)$$

waarin s de omtrek van de pen is.

Door het drijvende temperatuur verschil $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta = (\theta - \theta_f)$$

in te voeren, wordt vergelijking (10.17) een gewone 2e orde differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{\alpha \cdot s}{\lambda \cdot A} \cdot \Delta\theta = 0 \quad (10.18)$$

Deze vergelijking kan eenvoudiger worden door de invoering van:

$$m = \sqrt{\frac{\alpha \cdot s}{\lambda \cdot A}} \quad (10.19)$$

en m is een maat is voor **verhouding** tussen het warmtetransport door **convectie** en dat door **con-**
ductie.

De oplossing van deze 2e orde differentiaalvergelijking is:

$$\Delta\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

De randvoorwaarde aan de voet $x = 0$ van de pen geeft $\theta = \theta_0$ of $\Delta\theta = \Delta\theta_0$ en dit geeft:

$$\Delta\theta_0 = C_1 + C_2$$

De warmte-afgifte van het eindvlakje van de koelpen is voor technische berekeningen te verwaarlozen, dit geeft een randvoorwaarde van de tweede soort: ϕ_w is voorgeschreven en voor $x = h$ geldt:

$$\phi_w = \lambda \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=h} = 0$$

De uitdrukking voor de pen afgevoerde warmte Φ_w kan met de bovenstaande formules worden verkregen en deze luidt:

$$\Phi_w = \lambda \cdot m \cdot A \cdot \Delta\theta_0 \cdot \tanh(m \cdot h) \quad (10.20)$$

waarin de tangens hyperbolicus voorkomt en deze is gedefinieerd als:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Met deze formule is de warmtestroom Φ_w als functie van h te bepalen.

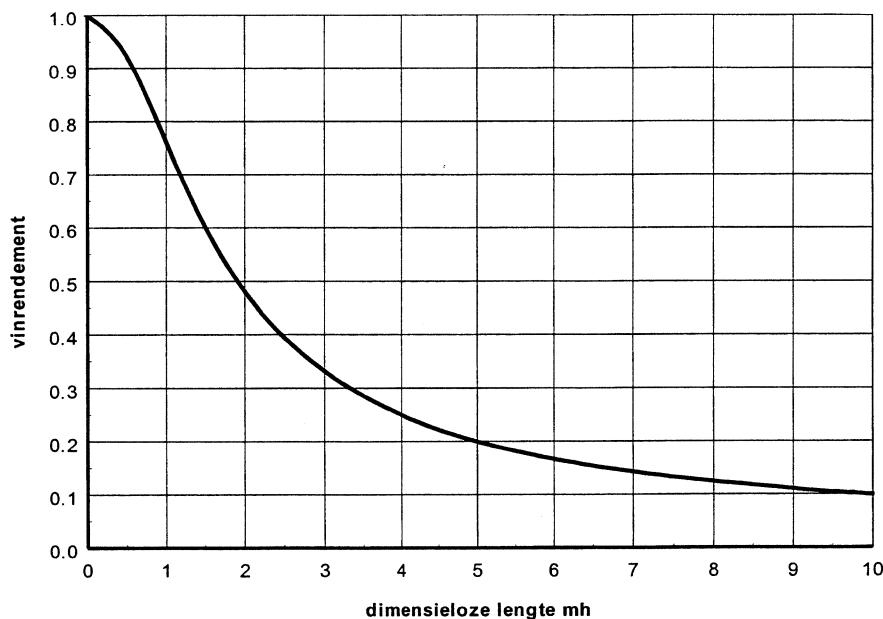
10.7.3 Het rendement van koelpennen en koelvinnen.

Doordat de vin warmte overdraagt wordt de temperatuur in de vin vanaf de voet steeds lager en de warmte-overdracht wordt door het lagere drijvende temperatuurverschil: $\Delta\theta = \theta - \theta_f$ steeds minder in de doorsneden die zich verder van de voet van de pen of vin bevinden.

Het rendement van een koelpen of koelvin is gedefinieerd als:

$$\eta_{vin} = \frac{\Phi_w(\text{indien } \Delta\theta \neq \Delta\theta_0)}{\Phi_w(\text{indien } \Delta\theta = \Delta\theta_0)}$$
$$\eta_{vin} = \frac{\lambda \cdot m \cdot h \cdot A \cdot \tanh(m \cdot h)}{\alpha \cdot s \cdot h} = \frac{\tanh(m \cdot h)}{m \cdot h} \quad (10.21)$$

In figuur 10.5 is het verloop v/h rendement als functie van $m \cdot h$ gegeven.



figuur 10.5 Verloop van het vinrendement als functie van $m \cdot h$

Rekenvoorbeeld 10.h:

Omschrijving:

Een ijzeren staafje met hoogte h_{pen} en diameter d_{pen} wordt als koelpen gebruikt.

Gegevens:

diameter v/h staafje :	d_{pen}	=	10	mm
warmtegeleidingscoëfficiënt	λ :	=	40	W/mK
warmteoverdrachtscoëfficiënt:	α :	=	9	W/m ² K
temperatuurverschil aan de voet:	$\Delta\theta_0$	=	200	K

Gevraagd:

- Bereken voor het geval dat de penhoogte $h_{\text{pen}} = 0$ de warmtestroom Φ_w .
- Schets de warmtestroom Φ_w als functie van de penhoogte h_{pen} ($0 < h_{\text{pen}} < 0.5\text{m}$).
- Hoe groot is de toename van Φ_w tussen geen pen en een pen met lengte $h = 5\text{ cm}$;

Oplossing:

- De warmtestroom voor een pen met afmeting $h = 0$, dus geen pen! Er geldt dan:

$$\Phi_o = \alpha \cdot A \cdot \Delta\theta_0$$

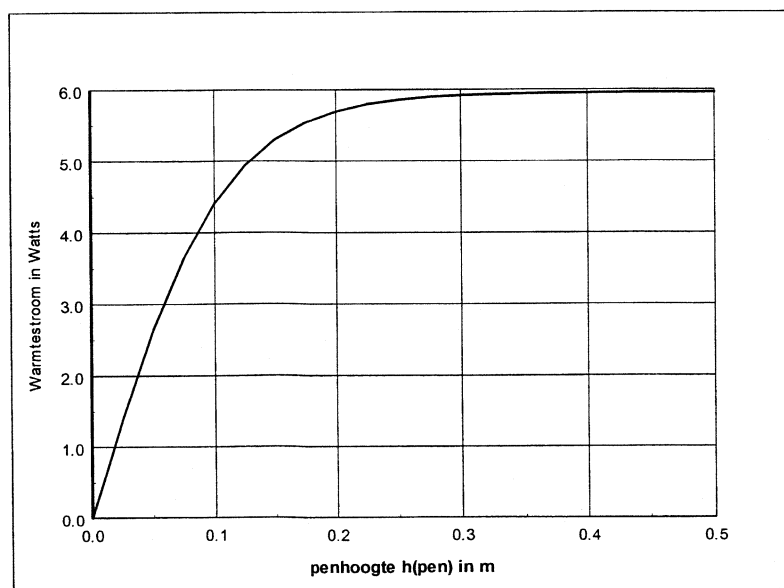
$$A = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (d_{\text{pen}})^2; \quad \Delta\theta_0 = 200\text{ K en dit geeft : } \Phi_o = 0.141\text{ W}$$

- Schets de warmtestroom Φ_w als functie van de penhoogte h_{pen} , ($0 < h_{\text{pen}} < 0.5\text{m}$).

$$\text{Gebruik hiervoor formule (10.20): } \Phi_w = \lambda \cdot m \cdot A \cdot \Delta\theta_0 \cdot \tanh(mh)$$

$$\text{Denk eraan dat } m^2 = (\alpha \cdot s)/(\lambda \cdot A) \text{ dus } m = 9.487\text{ m}^{-1}$$

$$\text{Denk eraan dat } s = \pi \cdot d \text{ dus } s = 0.031\text{ m}$$



figuur 10.6 Warmtestroom Φ_w als functie van de penhoogte

Uit figuur 10.6 blijkt dat:

voor	0	<	h_{pen}	<	100	mm Φ_w oploopt van 0,141 W naar 4,4 W;
voor	100 mm	<	h_{pen}	<	200	mm Φ_w nog maar met 25 % oploopt;
voor			h_{pen}	>	200	mm de toename in Φ_w minimaal is;

Toename van de warmteoverdracht bij het verlengen van de pen van $h = 0$ m naar $h = 5$ cm. daarbij gebruikmakend van Fig.10.4.

Bij $h = 0$ m : $\Phi_o = 0.141$ W (zie a)

Bij $h = 0.05$ m : $\Phi_w = 2.633$ W (invullen in (10.22));

Dit kan ook door gebruik te maken van de efficiency η_{pen} van de pen zie figuur 10.5

De maximale warmte-overdracht bij een pen met een hoogte van 50 mm is:

$$\Phi_{w0} = \alpha \cdot s \cdot h_{pen} \cdot \Delta\theta_0 = 9 \cdot 0,031 \cdot 0,05 \cdot 200 = 2,79 \text{ W}$$

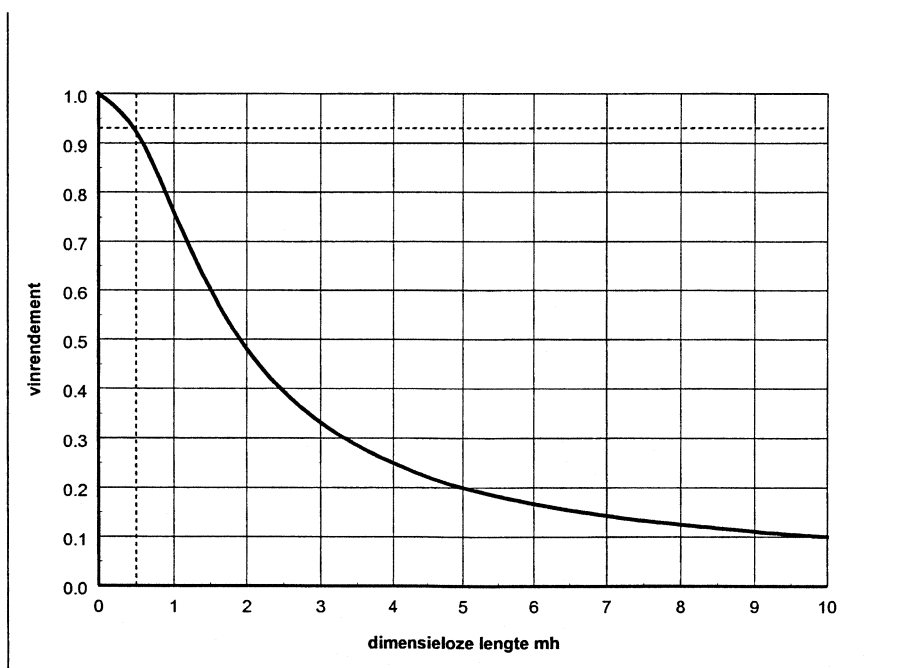
Het rendement van de pen is te berekenen met de waarde $m \cdot h_{pen} = 9,487 \cdot 0,05 = 0,4744$

$$\eta_{pen} = \tanh(0,4744) / 0,4744 = 0,931$$

De warmtestroom gecorrigeerd voor het rendement is nu: $\Phi_{w0} \cdot \eta_{pen} = 2,79 \cdot 0,931 = 2,59$

Ten opzichte van de voet van de pen is de warmteoverdracht toegenomen met de factor f:

$$f = \Phi_w / \Phi_o = 18.6$$



figuur 10.7 Vinrendement als functie van $m \cdot h$

10.8 Samenvatting

De warmte-overdracht van een wand naar een stroming is te beschrijven met de **afkoelingswet van Newton**.

In de afkoelingswet van Newton wordt de fluidumtemperatuur θ_f vervangen door de **mengtemperatuur** θ_m :

$$\phi_w = \alpha(\theta_w - \theta_m)$$

Het **kengetal van Nusselt** Nu is een dimensieloze maat voor α :

$$Nu = \frac{\alpha \cdot D}{\lambda} = \frac{\phi_w D}{(\theta_w - \theta_m)\lambda}$$

Het **kengetal van Prandtl (Pr)** wordt geschreven als:

$$Pr = \frac{\eta \cdot c}{\lambda} = \frac{\eta/\rho}{\lambda/\rho \cdot c} = \frac{\eta/\rho}{a}$$

Pr is een mate waarin de warmte achterblijft ten opzichte van de impuls. $Pr > 1$ is het geval bij slecht geleidende fluïda. $Pr < 1$ is het geval bij goed warmtegeleidende fluïda, waarbij de warmte goed wordt opgenomen.

Voor laminaire stroming kan de warmte-overdrachtscoëfficiënt α bepaald worden met:

Voor het geval van een **constante wandtemperatuur** geldt:

$$Nu = 3,66 + \frac{0,057 \cdot Re \cdot Pr \cdot \frac{D}{L}}{1 + 0,04 \cdot \left(Re \cdot Pr \cdot \frac{D}{L} \right)^{0,8}} \quad (10.10)$$

Voor en volledig ontwikkelde turbulente buisstroming wordt de **formule van Dittus en Boelter** gebruikt:

$$Nu = 0,023 \cdot Re_D^{0,8} \cdot Pr^n$$

De warmte-overdrachtscoëfficiënt is voor een turbulente stroming in de orde van grote van 10 maal hoger dan bij een laminaire stroming.

10.9 Oefenopgaven

10.9.1 Warmteoverdracht van verbrandingsgas naar water

Een koperen leiding is op een door verbrandingsgassen verwarmde plaat gesoldeerd. Door de leiding stroomt water en dit zal in temperatuur stijgen t.g.v. de verwarming. De gastoevoer is zodanig afgesteld, dat de temperatuur van de plaat en de leidingwand constant blijven.

Gegevens:

Leiding:

leidingdiameter	D_{leid}	=	13	mm
wanddikte	δ_{leid}	=	1	mm
leidinglengte	L_{leid}	=	250	cm
warmtegeleidingscoëfficiënt	λ_{leid}	=	385	$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

Stromingstoestanden:

laminaire stroming	Re_{lam}	=	2000
turbulente stroming	Re_{turb}	=	4000

Fysische grootheden water:

soortelijke massa	ρ_{water}	=	1000	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
dynamische viscositeit	η_{water}	=	10^{-3}	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
soortelijke warmte	c_{water}	=	4 200	$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
warmtegeleidingscoëfficiënt	λ_{water}	=	0,56	$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

Temperaturen:

inlaattemperatuur v/h koude water:	θ_{in}	=	10	$^{\circ}\text{C}$
temperatuur van de plaat	θ_{plaat}	=	70	$^{\circ}\text{C}$
gewenste tapwater temperatuur	θ_{tap}	=	50	$^{\circ}\text{C}$

Volumestromen van het tapwater:

Laagste volumestroom	Φv_{laag}	=	1,0	$\text{liter}\cdot\text{min}^{-1}$
Hoogste volumestroom	Φv_{hoog}	=	2,5	$\text{liter}\cdot\text{min}^{-1}$

Gevraagd:

- De inwendige diameter van de leiding: d_{leid} .
- Het oppervlak van de doorsnede van de leiding: A_{leid}
- Bereken de gemiddelde snelheid v/h water voor: Φv_{laag} en Φv_{hoog} resp.: u_{laag} en u_{hoog} .
- Bereken het getal van Reynolds voor: u_{laag} en u_{hoog} ; respectievelijk: Re_{laag} en Re_{hoog} .

Ga na of $Re_{\text{laag}} < 2\,000$ en of $Re_{\text{hoog}} > 4\,000$. Als dit niet zo is, dan is er een fout gemaakt!

- Bereken het getal van Prandtl Pr .
- Bereken het kengetal van Nusselt voor: Re_{laag} en Re_{hoog} ; respectievelijk: Nu_{laag} en Nu_{hoog} .
- Bereken de warmte-overdrachtscoëfficiënt voor: Re_{laag} en Re_{hoog} respectievelijk: α_{laag} en α_{hoog} .
- De temperatuur van het tapwater θ_{tap} voor de laagste en hoogste volumestroom.

10.9.2 Convectief wamtetransport in een collector

Een koperen leiding is op een collectorplaat gesoldeerd. Door de leiding stroomt water dat door de collectorplaat wordt verwarmd.

Gegevens:

Leidingdiameter	$D_{leid} = 50$	mm
Soortelijke warmte van het water	$c_w = 4200$	J/kg·K
Soortelijke massa van het water	$\rho_w = 1000$	kg/m ³
Inlaattemperatuur van het water	$\theta_{in} = 20$	°C
Warmteoverdrachtscoëfficiënt	$\alpha = 400$	W/m ² ·K
Volumestroom in de collector	$\Phi_V = 30$	liter/min

Gevraagd:

Wat is de benodigde leidinglengte L_{leid} als de temperatuur van het uitstromende water 50°C moet zijn? ($\theta_{uit} = 50^\circ\text{C}$)

Uitwerking:

1. Bepaal de uitdrukking van de warmtestroom $\Phi_{w,opw}$ t.g.v. het opwarmen

$$\Phi_{w,opw} = \Phi_V \cdot \rho_w \cdot c_w \cdot (\theta_{uit} - \theta_{in})$$
$$\Phi_{w,opw} = \frac{3}{1000 \times 60} \cdot 1000 \cdot 4200 \cdot (50 - 20) = 6300 \text{ W}$$

2. Bereken de mengtemperatuur

$$\theta_m = \frac{\theta_{uit} - \theta_{in}}{2}$$
$$\theta_m = \frac{50 + 20}{2} = 35^\circ\text{C}$$

3. Bepaal de uitdrukking voor de convectieve warmtestroomdichtheid

$$\phi_{w,conv} = \alpha \cdot (\theta_{uit} - \theta_m)$$
$$\phi_{w,conv} = 400 \cdot (50 - 35) = 6000 \text{ W/m}^2$$

4. Bereken de leidinglengte

$$L_{leid} = \frac{\Phi_{w,opw}}{\phi_{w,conv} \cdot \pi \cdot D_{leid}}$$
$$L_{leid} = \frac{6300}{6000 \cdot \pi \cdot 0,05} = 6,68 \text{ m}$$

11 Afkoeling en opwarming van lichamen

In dit hoofdstuk worden de onderstaande **onderwerpen** behandeld:

- **het afkoelen en opwarmen van voorwerpen;**
- **de temperatuurvereffeningscoëfficiënt (a);**
- **het kengetal van Biot (Bi);**
- **het kengetal van Fourier (Fo)**

11.1 Inleiding

Voorwerpen worden vaak in een omgeving geplaatst met een andere temperatuur dan het voorwerp heeft. Het is van belang om te kunnen voorspellen hoe lang het duurt voordat de temperatuur van het voorwerp een temperatuur heeft die tussen de temperatuur van het voorwerp en de omgevings-temperatuur ligt. Als voorbeeld kunnen we gevallen nemen zoals: bitterballen die in hete olie worden gedompeld; een flesje bier dat in de koelkast wordt gezet en kunststof die in een matrijsholte wordt gespoten.

In dit hoofdstuk wordt behandeld hoe de temperatuur van een voorwerp in de tijd kan worden berekend en hoe lang het duurt voordat een voorwerp de gewenste temperatuur heeft bereikt. Er worden alleen gevallen behandeld die relatief eenvoudig zijn en waarvoor goede benaderingsoplossingen beschikbaar zijn.

De afkoeling of opwarming van een voorwerp hangt af van een aantal factoren, zoals:

de vorm (plaat, cilinder, bol of kubus)

de soortelijke massa ρ , de warmtegeleiding λ en de soortelijke warmte c van het materiaal van het voorwerp

de warmte-overdrachtscoëfficiënt α

de begintemperatuur θ_0 en de temperatuur van het fluïdum θ_1

In paragraaf 9.1 is de "wet van Fourier" (9.05) voor warmtetransport gegeven en deze luidt:

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (11.01)$$

Er bestaan oplossingen voor deze ééndimensionale partiële differentiaalvergelijking, waarbij rekening wordt gehouden met de onderstaande randvoorwaarden van de:

1e soort, waarbij de temperatuur van de "wand" is voorgeschreven: ($\theta_w = \text{constant}$);

2e soort, waarbij de warmtestroomdichtheid ϕ_w is voorgeschreven;

3e soort, waarbij de warmtestroomdichtheid: $\phi_w = \alpha (\theta_w - \theta_1)$;

Doordat (11.01) een partiële differentiaalvergelijking is kunnen alleen voor vereenvoudigde gevallen oplossingen gevonden worden.

11.2 Lichaam met een uniforme temperatuurverdeling

De partiële differentiaalvergelijking (11.01) wordt een gewone differentiaalvergelijking als de temperatuurgradiënt te verwaarlozen is. Dit geldt als de thermische weerstand in het voorwerp veel lager is dan de thermische weerstand voor de warmte-overdracht tussen een fluïdum en een voorwerp. De thermische weerstand voor geleiding is voor een uitgestrekte vlakke plaat met dikte h eenvoudig te bepalen als de invloed van randen van de plaat op het warmtetransport worden verwaarloosd.

De thermische weerstand voor geleiding R_{gel} is

$$R_{gel} = \frac{h/2}{\lambda} \cdot \frac{1}{A} \quad (11.02)$$

De thermische weerstand voor convectie R_{conv} is:

$$R_{conv} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{A} \quad (11.03)$$

De temperatuurverdeling in een lichaam zal uniformer zijn voor het geval dat het quotiënt van de thermische weerstand voor geleiding en de thermische weerstand voor convectie, lager is.

In formulevorm is dit:

$$B = \frac{R_{gel}}{R_{conv}} \frac{\alpha}{\lambda} \cdot h/2$$

De term h kan worden opgevat als het quotiënt van het volume V en de oppervlakte A . Uit onderzoek van Biot is gebleken dat als de onderstaande verhouding:

$$Bi = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{V}{A} < 0,1 \quad (11.04)$$

geldt, dan kan worden aangenomen dat de temperatuurgradiënt zodanig laag is dat deze als nul kan worden beschouwd. De uitdrukking (11.04) wordt aangeduid met het kengetal van Biot **Bi**.

Voor het geval dat geldt $Bi < 0,1$ kan het verloop van de temperatuur in de tijd eenvoudig berekend worden. Voor metalen voorwerpen is de temperatuurverdeling voldoende uniform om de temperatuurgradiënt gelijk aan nul te stellen, wat in het onderstaande rekenvoorbeeld is getoond.

Rekenvoorbeeld 11.a:

gegeven: Een stalen kubus die in een stroom water wordt afgekoeld
ribafmeting $a = 12\text{mm}$;
warmtegeleidingscoëfficiënt: $\lambda = 50 \text{ W}/(\text{m K})$;

gevraagd: Het kengetal van Biot Bi_{1000}
voor een warmte-overdrachtscoëfficiënt $\alpha_{1000} = 1000 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$.

oplossing:
$$\frac{V}{A} = \frac{0,012^3}{6 \times 0,012^2} = \frac{0,012}{6} = 0,002 \text{ m}$$

$$Bi_{1000} = \frac{\alpha_{1000}}{\lambda} \cdot \frac{V}{A} = \frac{1000}{50} \cdot 0,002 = 0,04 < 0,1$$

Er wordt hier aangegeven, hoe het temperatuurverloop kan worden berekend voor het geval, dat het kengetal van Biot $Bi < 0,1$ en dit is vrijwel altijd het geval voor convectieve warmtetransport naar een metalen lichaam. Uitgegaan wordt van een voorwerp, dat in een fluïdum wordt ondergedompeld.

Gegeven:

het volume V en het buitenoppervlakte A ,
 een soortelijke massa ρ en een soortelijke warmte c ,
 de begintemperatuur θ_0 ;
 de fluïdumtemperatuur θ_1
 de warmte-overdrachtscoëfficiënt α

Het voorwerp heeft op het tijdstip t de temperatuur $\theta(t)$. De warmtebalans is gebaseerd op het feit, dat de toegevoerde warmte via convectie resulteert in de uniforme opwarming v/h voorwerp.

<p><i>toegevoerde warmte = toename inwendige energie</i></p> $\Phi_w = \alpha \cdot A \cdot (\theta_f - \theta) = \rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{d\theta}{dt}$ $\alpha \cdot A \cdot (\theta_f - \theta) \cdot dt = \rho \cdot c \cdot V \cdot d\theta$	(11.05)
---	---------

Vergelijking (11.05) is in tegenstelling tot vergelijking 11.01 een gewone differentiaalvergelijking en deze kan worden geschreven als:

$\frac{d\theta}{\theta - \theta_f} = -\frac{\alpha \cdot A}{\rho \cdot c \cdot V} \cdot dt$	(11.06)
---	---------

en de algemene oplossing van (11.06) is:

$$\ln(\theta - \theta_f) = -\frac{\alpha \cdot A}{\rho \cdot c \cdot V} \cdot t + C$$

De integratieconstante C is te bepalen met de beginvoorwaarde: $t = 0$; $\theta = \theta_0$ en geeft de waarde voor de integratieconstante C :

$$C = \ln(\theta_1 - \theta_0).$$

Na invulling en uitwerking volgt:

$\frac{\theta_f - \theta}{\theta_f - \theta_0} = e^{-\frac{\alpha \cdot A}{\rho \cdot c \cdot V} \cdot t}$	(11.07)
--	---------

Het verloop van de temperatuur van het lichaam is:

$\theta(t) = \theta_0 + (1 - \exp(-t/\tau)) \cdot (\theta_1 - \theta_0)$	(11.08)
--	---------

Rekenvoorbeeld 11.b:

probleem: De opwarmtijd bepalen van een kubus die in een bak met olie wordt geplaatst.

gegeven:

ribbe:	a= 5 mm
warmtegeleidingscoëfficiënt:	$\lambda= 110 \text{ W/m K};$
soortelijke massa:	$\rho= 8570 \text{ kg/m}^3 ;$
soortelijke warmte:	$c= 0,35 \text{ kJ/kg K};$
warmte-overdrachtscoëfficiënt:	$\alpha= 500 \text{ W/m}^2 \text{ K};$
begintemperatuur:	$\theta_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C};$
fluidum temperatuur:	$\theta_1 = 120 \text{ }^\circ\text{C}.$

gevraagd: De temperatuur van de kubus na 5, 15 en 25 seconden.

oplossing:

1. Berekening van het kengetal van Biot

$$Bi = \frac{\alpha \cdot V}{\lambda \cdot A} = \frac{500 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^3}{110 \cdot 6 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2} = 0,004 < 0,1$$

Het getal van Biot voldoet aan het criterium voor de uniforme temperatuurverdeling.

2. Berekening van de exponent van de e-macht in formule (11.08)

$$\frac{\alpha \cdot A}{\rho \cdot c \cdot V} = \frac{500 \cdot 6 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2}{8570 \cdot 0,35 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^3} = \frac{1}{5 \text{ s}}$$

Formule (11.08) wordt voor dit geval:

$$\theta = \theta_0 + \left[1 - e^{-t/5s} \right] \cdot (\theta_1 - \theta_0)$$

3. Berekening van de temperatuur van de kubus na 5, 15 en 25 seconden.

na **5 sec.** is de exponent van de e-macht: $-0,2 \cdot 5 = -1$ en de temperatuur θ_5 is dan:

$$\theta_5 = \theta_0 + (1 - e^{-1}) \cdot (\theta_1 - \theta_0) = 20 + (1 - 0,3679) \cdot 100 = 20 + 63,21 = 83,21 \text{ }^\circ\text{C}$$

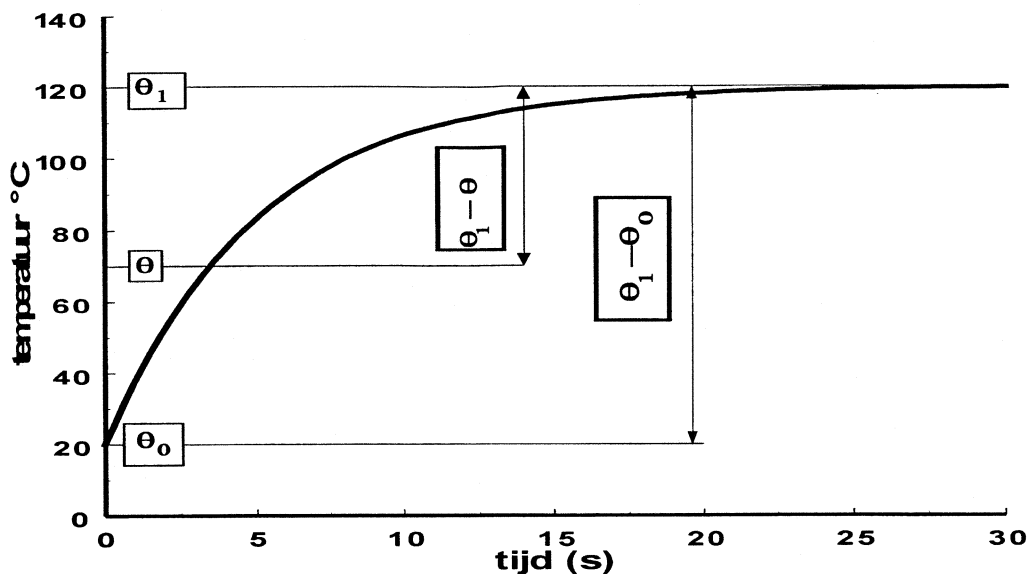
na **15 sec.** is de exponent van de e-macht: $-0,2 \cdot 15 = -3$ en de temperatuur θ_{10} is dan:

$$\theta_{15} = \theta_0 + (1 - e^{-3}) \cdot (\theta_1 - \theta_0) = 20 + (1 - 0,0498) \cdot 100 = 20 + 95,02 = 115,02 \text{ }^\circ\text{C}$$

na **25 sec.** is de exponent van de e-macht: $-0,2 \cdot 25 = -5$ en de temperatuur θ_{25} is dan:

$$\theta_{25} = \theta_0 + (1 - e^{-5}) \cdot (\theta_1 - \theta_0) = 20 + (1 - 0,00673) \cdot 100 = 20 + 99,3 = 119,3 \text{ }^\circ\text{C}$$

In het rekenvoorbeeld 11.b is te zien, dat na 5 seconden het voorwerp al een temperatuurstijging van 63,2 °C heeft gekregen en dit is: $1 - e^{-1} = 0,632$ van het aanvankelijke temperatuurverschil van 100 °C. Naarmate de het voorwerp zich langer in het fluïdum bevindt verloopt de temperatuurstijging steeds trager. Dit is te verklaren is uit het zogenaamde "drijvende" temperatuurverschil (en dit verschil wordt gedurende het opwarmen steeds kleiner). Het verloop van de temperatuur van het voorwerp in de tijd is in Figuur 11.01 getekend.



Figuur 11.01 *Temperatuurverloop bij het opwarmen van een lichaam van 20 °C naar 120 °C*

Vergelijking (11.08) wordt vooral gebruikt om het temperatuur verloop te berekenen en deze formule is ook gebruikt om het temperatuurverloop te plotten in Fig. 11.01.

Een beter af te lezen diagram kan met formule (11.07) worden verkregen en hierbij wordt gebruik gemaakt van het relatieve drijvende temperatuurverschil $\theta\theta$

$$\theta\theta = \frac{\theta_f - \theta}{\theta_f - \theta_0} = \frac{\text{het} \cdot \text{drijvende} \cdot \text{temperatuurverschil}}{\text{de} \cdot \text{temperatuurssprong}} \quad (11.09)$$

Het relatieve drijvend temperatuurverschil $\theta\theta$ in uitdrukking (11.09) wordt in veel diagrammen toegepast en in Figuur 11.02 is op de logaritmische y as, de waarde van $\theta\theta$ uitgezet.

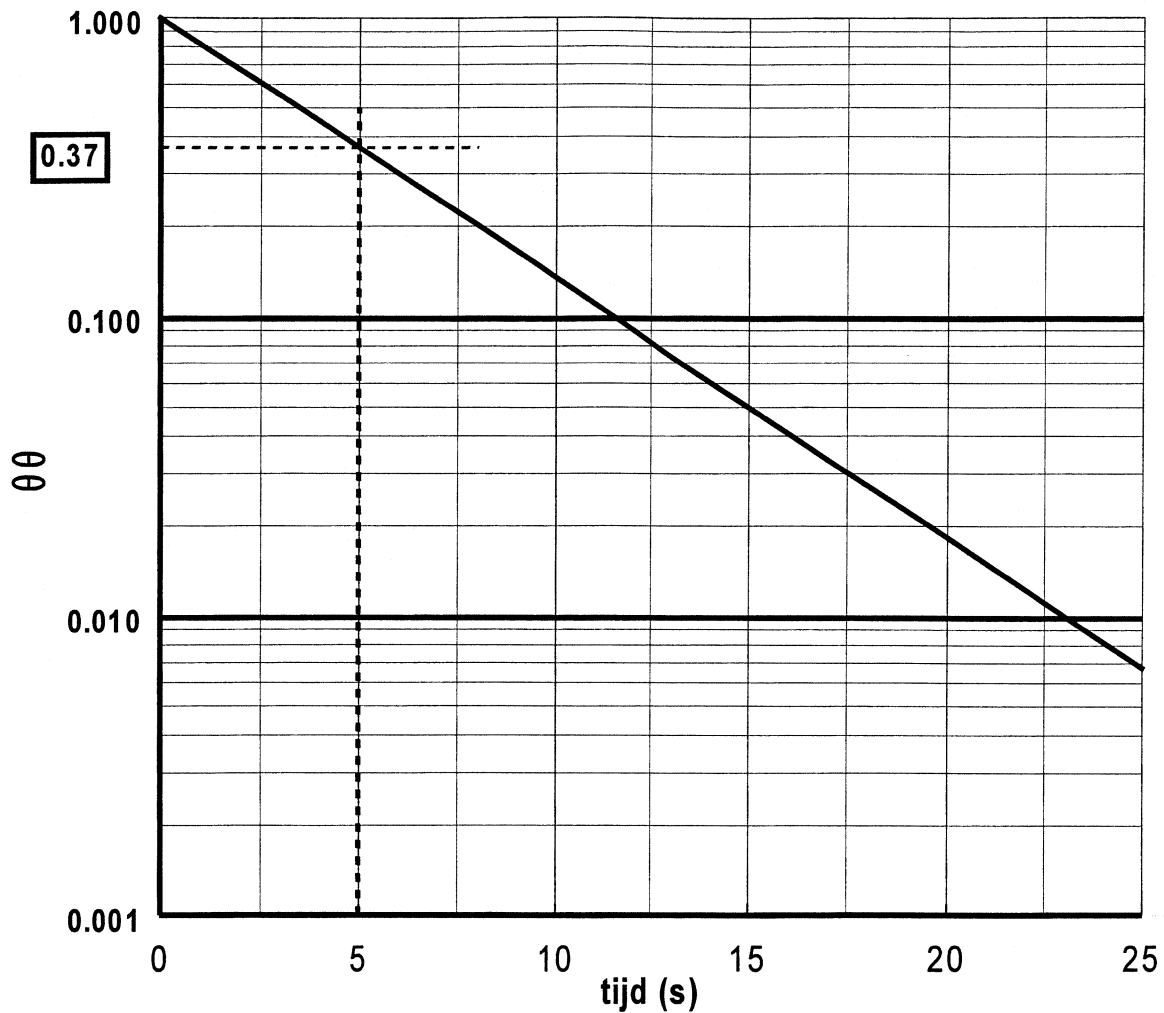
Rekenvoorbeeld 11.c

gegeven: Een voorwerp als beschreven in rekenvoorbeeld 11.b

probleem: Bepaling van de temperatuur $\theta(t)$ van het lichaam, beschreven in Rekenvoorbeeld 11.b, met behulp van Figuur 11.02.

oplossing:
Trek een verticale lijn bij 5 seconden en bepaal het snijpunt met de lijn voor de kubus.

Het snijpunt is 0,37. De temperatuur van het voorwerp is dan:
 $\theta_5 = \theta_1 - 0,37 \cdot (\theta_1 - \theta_0) = 120 - 0,37 \cdot 100 = 120 - 37 = 83 \text{ } ^\circ\text{C}$



Figuur 11.02 *Verloop v/h relatieve drijvende temperatuurverschil $\theta\theta$ als functie v/d tijd.*

Met deze grafiek is te bepalen na hoeveel tijd het relatieve drijvende temperatuurverschil $\theta\theta = 0,01$ is. Hiertoe wordt een horizontale lijn bij $\theta\theta = 0,01$ getrokken en het snijpunt met de afkoellijn geeft een waarde van 23 seconden.

De formule (11.07) geeft de response op een zogenaamde stapfunctie op het tijdstip $t = 0$ wordt het voorwerp dat een temperatuur θ_0 had, in een fluïdum gebracht met een temperatuur θ_1 . schrijven als:

$$\frac{\theta - \theta_f}{\theta_0 - \theta_f} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (11.10)$$

waarin τ de zogenaamde tijdsconstante is.

$$\tau = \frac{\rho \cdot c \cdot V}{\alpha \cdot A} \quad (11.11)$$

De fysische betekenis van de tijdconstante τ is:

$$\tau = \text{de thermische weerstand} \cdot \text{de opgeslagen warmte} = \frac{1}{\alpha \cdot A} \cdot \frac{\rho \cdot c \cdot V}{1} = \frac{\rho \cdot c \cdot V}{\alpha \cdot A}$$

In analogie met de elektriciteitsleer kunnen we stellen dat:

$\rho \cdot c \cdot V$ = de warmtecapaciteit (condensator);

$1/(\alpha \cdot A)$ = de thermische weerstand (Ohmse weerstand);

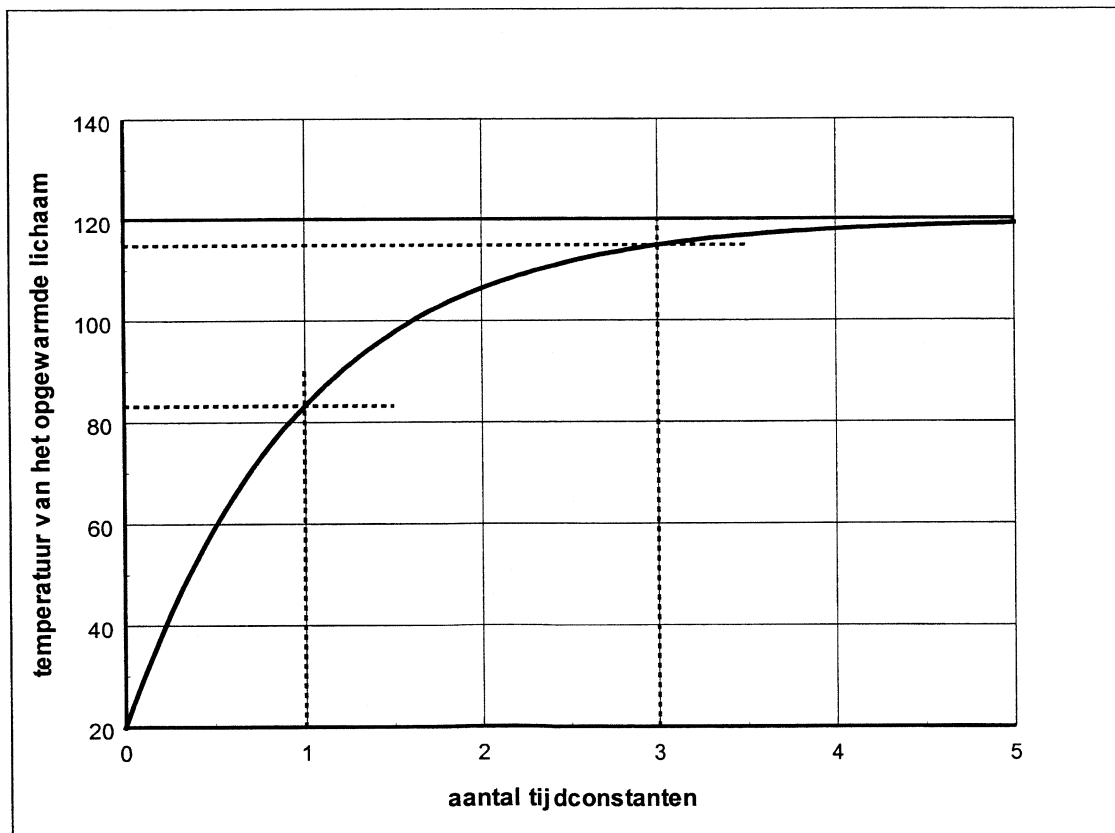
Voor het rekenvoorbeeld is de tijdconstante τ

$$\tau = \frac{\rho \cdot c \cdot V}{\alpha \cdot A} = \frac{8500 \cdot 0,34 \cdot 5^3 \cdot 10^{-9}}{500 \cdot 6 \cdot 5^2 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot s$$

en in Figuur 11.03 is te zien is dat, na:

$3 \cdot \tau$ de eindtemperatuur θ_1 (120 °C) op 5 °C na gehaald is;

$5 \cdot \tau$ het verschil met de eindtemperatuur verwaarloosbaar klein is.



Figuur 11.03 Verloop van de temperatuur als functie van het aantal tijdconstanten.

11.3 Ééndimensionale warmte-overdracht in platen, cilinders en bollen.

In dien het kengetal van Biot $Bi > 0,1$ is, dan levert de aanname dat de temperatuurgradiënt: $\text{grad}(\theta) = 0$ in een lichaam, dat een temperatuurverandering ondergaat, te onnauwkeurige resultaten op. Er zijn andere benaderingsmethoden voor eenvoudige gevallen, waarmee het temperatuurverloop kan worden bepaald. Er wordt dan een karakteristieke temperatuur berekend en dit is meestal de temperatuur in het centrum van een lichaam of de gemiddelde temperatuur.

In hoofdstuk 9 is de formule (9.05) getoond en deze is hier voor het geval dat de inwendige warmteproductie $q = 0$, gesteld.

$$\lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (11.12)$$

Voor eenvoudige geometriën (platen, cilinders en bollen) en randvoorwaarden is de opwarm- of afkoeltijd te bepalen door middel van grafieken of benaderingsformules. Hierbij wordt de zogenaamde temperatuurvereffeningscoëfficiënt a gebruikt die gedefinieerd is als:

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \quad (11.13)$$

Vergelijking (11.12) wordt dan:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (11.14)$$

Het kengetal van Fourier (Fo) geeft de mogelijkheid om algemeen toepasbare uitdrukkingen te vinden.

Het kengetal van Fourier (Fo) is gedefinieerd als:

$$Fo = \frac{4 \cdot a \cdot t}{H^2} \quad \text{of} \quad Fo = \frac{4 \cdot a \cdot t}{D^2} \quad (11.15)$$

waarin H de plaatdikte is en D de diameter van de cilinder of de bol.

Net als bij de problemen met een temperatuurgradiënt $\text{grad}(\theta) = 0$ kan voor een karakteristieke temperatuur, zoals de temperatuur in het centrum θ_c , worden geschreven:

$$\theta \theta_c = \frac{\theta_1 - \theta_c}{\theta_1 - \theta_0} = C_{c1} \cdot e^{-C_{c2} \cdot Fo} \quad (11.16)$$

waarin C_{c1} voor de temperatuur θ_c in het centrum geldt en hetzelfde geldt voor C_{c2} en voor de gemiddelde temperatuur θ_g gelden de constanten C_{g1} en C_{g2} .

Uitdrukking (11.16) is nauwkeurig tot op 1 %, mits het getal van Fourier $Fo > 0,2$.

De coëfficiënten C_1 en C_2 zijn afhankelijk van de geometrie en deze zijn voor:

C_1 & C_2	plaat	cilinder	bol	opmerking
C_{c1}	1,27	1,60	2,0	centrum
C_{c2}	2,42	5,71	9,67	centrum
C_{g1}	1,00	1,78	0,9	gemiddelde
C_{g2}	2,6	6,5	10,5	gemiddelde

Het is bij deze benaderingsmethode ook mogelijk om met een tijdconstante τ te werken en er ontstaat dan de uitdrukking:

$$\theta\theta_c = \frac{\theta_1 - \theta_c}{\theta_1 - \theta_0} = C_{c1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_c}} \quad (11.17)$$

Door gebruik te maken van de uitdrukking (11.15) voor het kengetal van Fourier Fo ontstaat de uitdrukking voor de tijdconstante τ_c :

$$\tau_c = \frac{H^2}{a \cdot C_{c2}} \quad (11.18)$$

De uitdrukking voor de temperatuur in het centrum wordt dan:

$$\theta_c = \theta_0 + \left[1 - C_{c1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right] \cdot (\theta_1 - \theta_0)$$

Rekenvoorbeeld 11.d:

probleem: De opwarmtijd bepalen van een ∞ -grote plaat, waarvan de wandtemperatuur een temperatuursprong ondergaat.

gegeven:

plaatdikte	H	= 8	mm;
warmtegeleidingscoëfficiënt:	λ	= 0,5	W/m K;
soortelijke massa:	ρ	= 907	kg/m ³ ;
soortelijke warmte:	c	= 2	kJ/kg K;
begintemperatuur:	θ_0	= 0	°C;
eindtemperatuur:	θ_1	= 100	°C

gevraagd: De temperatuur van de plaat na 20 seconden.

oplossing: 1. Berekening van het kengetal van Fourier:

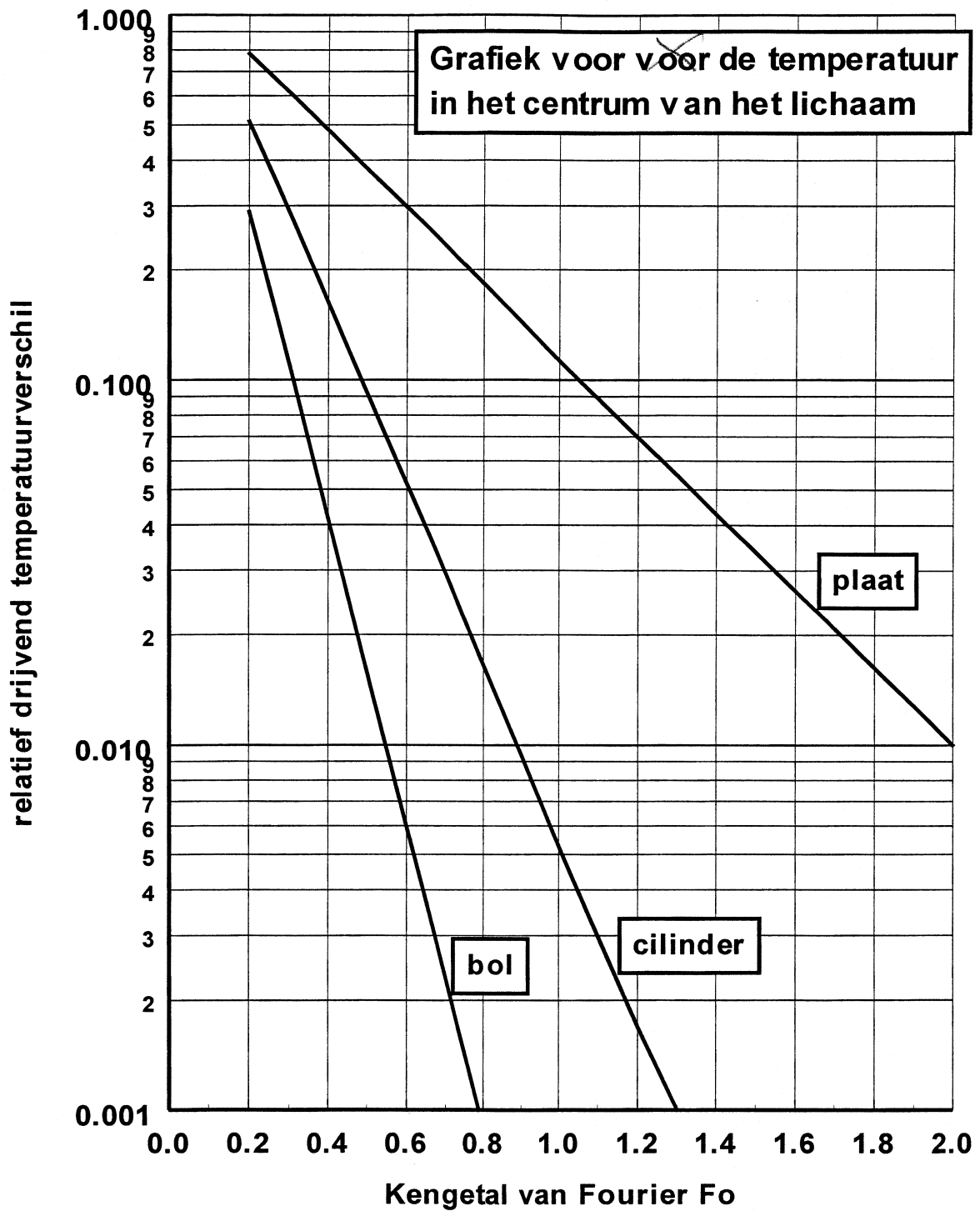
$$Fo = [\lambda/(\rho \cdot c)] \cdot [(4 \cdot t)/(H^2)] = Fo = 0,345$$

2. Berekening van de temperatuur v/h centrum na 20 seconden:

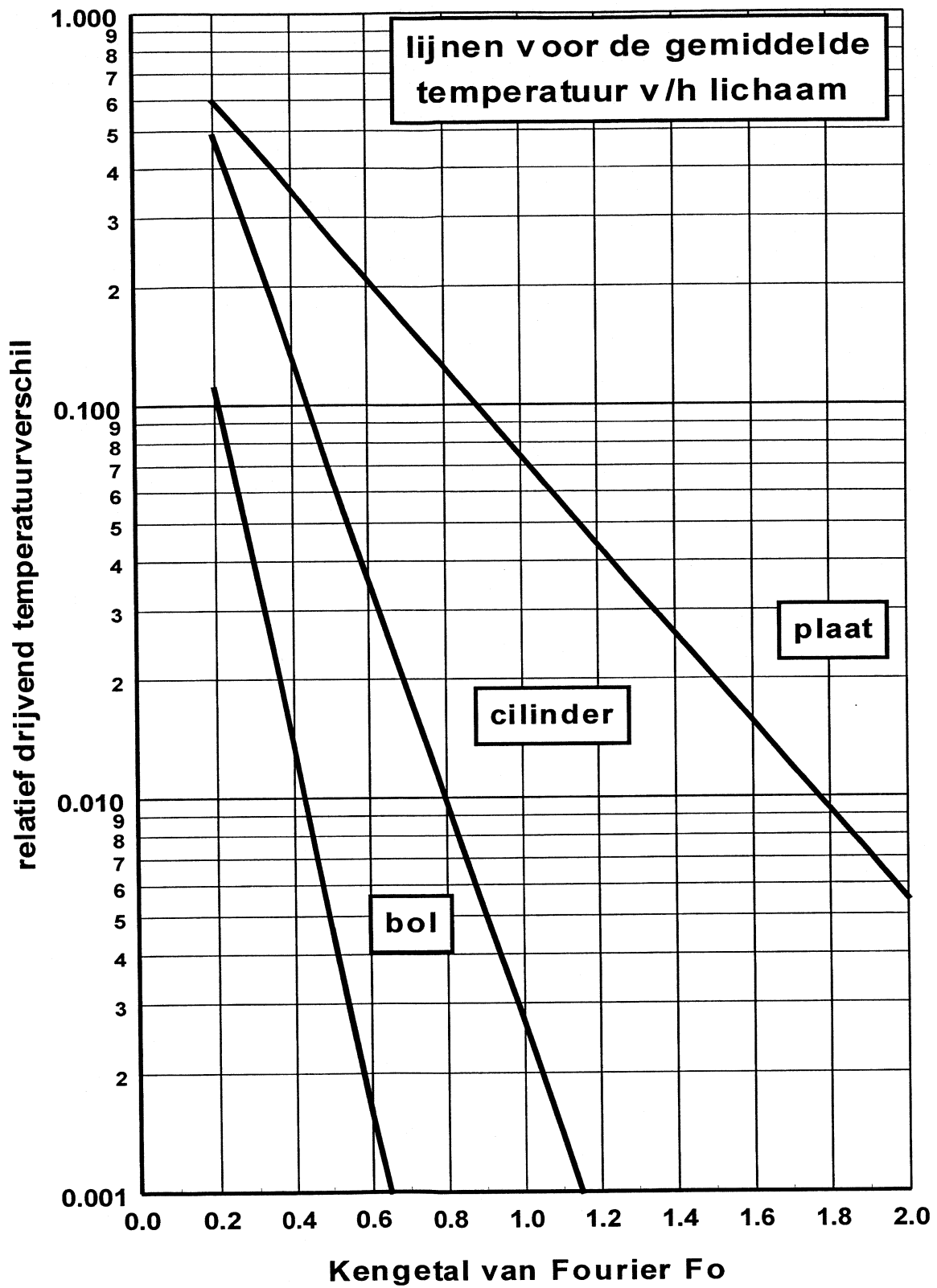
Formule (11.08) wordt voor dit geval:

$$\theta_{20} = \theta_0 + \left[1 + C_{c1} \cdot e^{-C_{c2} \cdot Fo} \right] \cdot (\theta_1 - \theta_0) \quad \theta_{20} = 44,68 \text{ °C}$$

Er kan net als bij het opwarmen van een lichaam een plot gemaakt worden van het relatieve drijvende temperatuurverschil als functie van het kengetal van Fourier Fo .



Figuur 11.04 Verloop van het relatieve drijvende temperatuurverschil θ_c voor de temperatuur in het centrum θ_c



Figuur 11.05 Verloop van het relatieve drijvende temperatuurverschil $\theta\theta_g$ voor de gemiddelde temperatuur

11.4 Samenvatting

De **tijd** voor de **afkoeling** of **opwarming** van een lichaam is afhankelijk van de vorm, massa, warmtegeleiding en soortelijke warmte van het lichaam, van de warmtecoëfficiënt en van de temperatuur van de omgeving. Er geldt:

$$\frac{\theta_f - \theta}{\theta_f - \theta_0} = e^{-\frac{\alpha \cdot A}{\rho \cdot c \cdot V} \cdot t}$$

De **temperatuurvereffeningscoëfficiënt** (a):

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$$

Het **kengetal van Fourier** (Fo) is geformuleerd als:

$$Fo = \frac{4 \cdot a \cdot t}{H^2} \quad \text{of} \quad Fo = \frac{a \cdot t}{R^2}$$

Het verloop van de temperatuur in het centrum van een lichaam is:

$$\frac{\theta_w - \theta_c}{\theta_w - \theta_0} = C_1 e^{-C_2 \cdot Fo}$$

11.5 Oefenopgave

11.5.1 De bitterbal

Een bitterbal wordt in de frituurpan gedaan.

Gegeven:

$$\lambda = 1 \text{ W/mK}$$

$$\rho = 1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 10 \cdot 10^3 \text{ J/kgK}$$

$$T_{\text{bal}} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_{\text{vet}} = 180 \text{ }^\circ\text{C}$$

Gevraagd:

Hoe lang duurt het voordat de bitterbal heet (100 °C in de kern) is?

11.5.2 Opwarming messing cilinders

Toelichting:

Een messing cilinder op kamertemperatuur wordt in 2 waterkokers met verschillende watertemperaturen ondergedompeld.

Gegevens:

grootheden:

straal:	r_{cil}	=	5	mm
soortelijke warmte	c_{cil}	=	0,385	kJ/kg K
warmtegeleidingscoëfficiënt	λ_{cil}	=	110	W/m K
begintemperatuur:	θ_0	=	20	°C
fluidumtemperatuur:	θ_f	=	100.0	°C

de warmte-overdrachtscoëfficiënt voor kokend water: $\alpha = 5000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$

de warmte-overdrachtscoëfficiënt voor water van 95 °C: $\alpha = 1000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$

Gevraagd:

voor de 2 temperaturen van het water.

- de tijdconstanten τ
- het getal van Biot Bi
- de temperatuur θ_{20} v/h lichaam na 20 seconden

APPENDICES

A. Toelichting op het dictaat en de leerstof	2
B. Eenheden, Formules en Kengetallen die uit het hoofd geleerd moeten worden.	3
C. Oefenopgave ‘De Zonneboiler’	7
D. Antwoorden van de oefenopgaven	11
E. Dimensie-analyse	17
F. Trefwoordenregister	20
G. Literatuur	23

APPENDIX A

Toelichting op het dictaat en de leerstof

Er wordt **niet vereist** dat alle begrippen en formules uit het hoofd geleerd moeten worden.

Begrippen en formules die **wel uit het hoofd geleerd moeten worden** staan **vet** omkaderd zoals hieronder voor de definitie van een kengetal en het kengetal van Reynolds, is weergegeven.

De definitie van een **kengetal** is:

Een kengetal is een dimensieloos getal, verkregen uit fysische grootheden en geometrische afmetingen.

Kengetal van Reynolds:

$$\text{Re}_D = \frac{\rho \cdot v_{\text{gem}} \cdot D}{\eta} \quad (2.05)$$

Begrippen en formules die **belangrijk zijn** voor het begrip, zijn enkelvoudig omkaderd, zoals hieronder voor het begrip **hechtvoorwaarde**.

*Experimenteel is gebleken, dat verondersteld kan worden dat ieder fluïdum zich aan een wand hecht, dat wil zeggen dat de snelheid van de aan de wand grenzende fluïdumdeeltjes gelijk aan die van de wand is. Dit is de zogenaamde **hechtvoorwaarde**.*

Rekenvoorbeelden staan in een dubbel kader, zoals hieronder voor de berekening van de volumestroom Φ_V

Rekenvoorbeeld 3a:

gegeven: Door het oppervlak $A = 0,001 \text{ m}^2$, stroomt een fluïdum met een stroomsnelheid $v = 0,5 \text{ m/s}$

gevraagd: de volumestroom door A

oplossing: volumestroom $\Phi_V = 0,001 \cdot 0,5 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$

Aan het einde van ieder hoofdstuk is een samenvatting gegeven.

Een lijst met trefwoorden is achter in het dictaat opgenomen; Appendix E.

Een aparte lijst met formules die bekend worden verondersteld is te vinden in Appendix B.

APPENDIX B

Eenheden, Formules en kengetallen die uit het hoofd geleerd moeten worden

Eenheden

Grootheid	symbool	M.K.S.- eenheid	benaming	Technische eenheid	Omrekening
Soortelijke massa	ρ	kg/m ³			
Volume	V	m ³	kubieke meter	liter	1 liter = 10 ⁻³ m ³
Oppervlakte	A	m ²	vierkante meter		
Viscositeit	η	kg/m·s	Poise		
Druk	p	kg/m·s ²	Pa	bar	1 bar = 10 ⁵ Pa

Formules en kengetallen

De **dynamische viscositeit** η is de verhouding tussen de optredende schuifspanning en de snelheidsgradiënt.

$$\eta = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}} = \frac{\tau}{\gamma \cdot} \quad (2.03)$$

De definitie van een **kengetal** is:

Een kengetal is een **dimensieloos getal**, verkregen uit fysische grootheden en geometrische afmetingen.

Kengetal van Reynolds:

$$Re_D = \frac{\rho \cdot v_{gem} \cdot D}{\eta} \quad (2.05)$$

Benodigd **drukverschil** Δp voor een **wrijvingsloze stroming** van een vloeistof met een soortelijke massa ρ , die met een snelheid v door een buis stroomt:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$

Benodigd **drukverschil** Δp voor een **stroming met wrijving** van een vloeistof met een soortelijke massa ρ , die met een snelheid v door een buis stroomt in een rechte leiding met diameter D en lengte L . waarin f de buisweerstandsfactor is:

$$\Delta p = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{gem}^2 \quad (2.06)$$

Oppervlakte A van een cirkel met straal R: $A = \pi \cdot R^2$

Oppervlakte A van een cirkel met diameter D: $A = \pi/4 \cdot D^2$

De **volumestroom** Φ_v is gedefinieerd als:

Het volume V dat per tijdseenheid door een oppervlak A stroomt, in formulevorm:

$$\Phi_v(A, v) = A \cdot v_{gem} \quad (3.01)$$

Een **controle-oppervlak** is gedefinieerd als:

Een begrensde oppervlak die een volume volledig omsluit.

De **massastroom** Φ_m is gedefinieerd als:

de massa m die per tijdseenheid door een oppervlak A stroomt en in formulevorm:

$$\Phi_m(A, v, \rho) = A \cdot v \cdot \rho \quad \text{of} \quad \Phi_m(A, v, \rho) = \Phi_v(A, v) \cdot \rho \quad (3.02)$$

De **massabalans** is gedefinieerd als:

Per tijdseenheid moet de netto uit een controle-volume stromende massa gelijk zijn aan de vermindering van massa binnen het controle-volume.

De **energiebalans** wordt als volgt gedefinieerd:

De aan een open systeem toegevoerde energie per tijdseenheid moet gelijk zijn aan de netto uitstroming van energie uit het systeem plus de toename van energie binnen het systeem plus de door het systeem verrichte arbeid.

Gemiddelde snelheid v_{gem} in een doorsnede A bij een volumestroom Φ_v $v_{gem} = \Phi_v / A$

arbeid W (work) is kracht maal weg (**kracht parallel aan weg**)

$$W = F \cdot s \quad (3.08)$$

per tijdseenheid levert dit **vermogen P** (power) en dit is **kracht F** \times **snelheid v** (weer parallel):

$$P = F \cdot v \quad (3.09)$$

de kinetische of bewegingsenergie:

$$U_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (3.10)$$

De potentiële energie U_{pot} :

$$U_{pot} = m \cdot g \cdot z \quad (3.11)$$

De inwendige energie (thermisch):

$$U_{inw} = c \cdot m \cdot T \quad (3.12)$$

waarin: c – soortelijke warmte (J/kg); m – massa (kg); T – absolute temperatuur (K)

Een **stroomlijn** is gedefinieerd als:

Een stroomlijn is de weg die de deeltjes in een laminaire stroming in een fluïdum afleggen. Indien er een versmalling in de stroming wordt gecreëerd, komen de stroomlijnen dichter bij elkaar te liggen.

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot z + p = \text{constant} \quad (3.19)$$

Druk Δp van een vloeistofkolom met een soortelijke massa ρ en hoogte h : $\Delta p = \rho \cdot g \cdot h$

De kenmerken van een **Couette stroming** zijn:

Een zuivere Couette stroming treedt op tussen twee oneindig uitgestrekte evenwijdige wanden waartussen zich een viskeus incompressibel fluïdum bevindt. De wanden bewegen zich eenparig in hun vlakken ten opzichte van elkaar.

Vlakke Poiseuille stroming, de **gemiddelde snelheid** u_{gem} :

$$u_{gem} = \frac{\Phi_v}{b \cdot h} \quad (4.10)$$

Laminaire stroming in een ronde buis, de **gemiddelde snelheid** u_{gem} :

$$u_{gem} = \frac{\Phi_v}{\pi R^2} \quad (4.15)$$

$$\Delta p = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{gem}^2 \quad (4.18)$$

$$\Delta p = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\text{gem}}^2 \quad (6.01)$$

$$\Delta p = \zeta \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\text{gem}}^2 \quad (6.05)$$

$$F = C_D \cdot A_n \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_0^2 \quad \text{met } A_n = b \cdot h \quad (7.03)$$

De energie, benodigd om een massa m van een bepaalde stof in temperatuur te laten stijgen

$$\text{is: } Q = c \cdot m \cdot (\theta_1 - \theta_0) \quad (8.01)$$

De smeltwarmte (L_s) is:

de hoeveelheid warmte die per massa-eenheid nodig is om een stof van de vaste fase naar de vloeibare fase te transformeren.

De verdampingswarmte (L_v) is:

de hoeveelheid warmte die per massa-eenheid nodig is om een stof van de vloeibare in de gasvormige fase te transformeren.

De warmtestroom bij geleiding is:

$$\Phi_w = \lambda \cdot A \cdot \frac{\theta_1 - \theta_2}{\Delta x} \quad (9.01)$$

Voor de specifieke thermische weerstand r_{th} geldt:

$$\phi_w = \frac{\Delta \theta}{r_{th}} \rightarrow r_{th} = \frac{\Delta \theta}{\phi_w} \quad (9.12)$$

$$\Phi_w = A \cdot \phi_w \rightarrow R_{th} = \frac{r_{th}}{A} \quad (9.14)$$

De afkoelingswet van Newton, waarin de convectieve warmte-overdracht evenredig wordt gesteld met het temperatuurverschil tussen de wand en het fluidum ver van de wand, is als volgt geformuleerd:

$$\phi_w = \alpha \cdot (\theta_w - \theta_f) \quad (9.15)$$

$$\Phi_w = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot (T^4 - T_0^4) \quad (9.24)$$

APPENDIX C

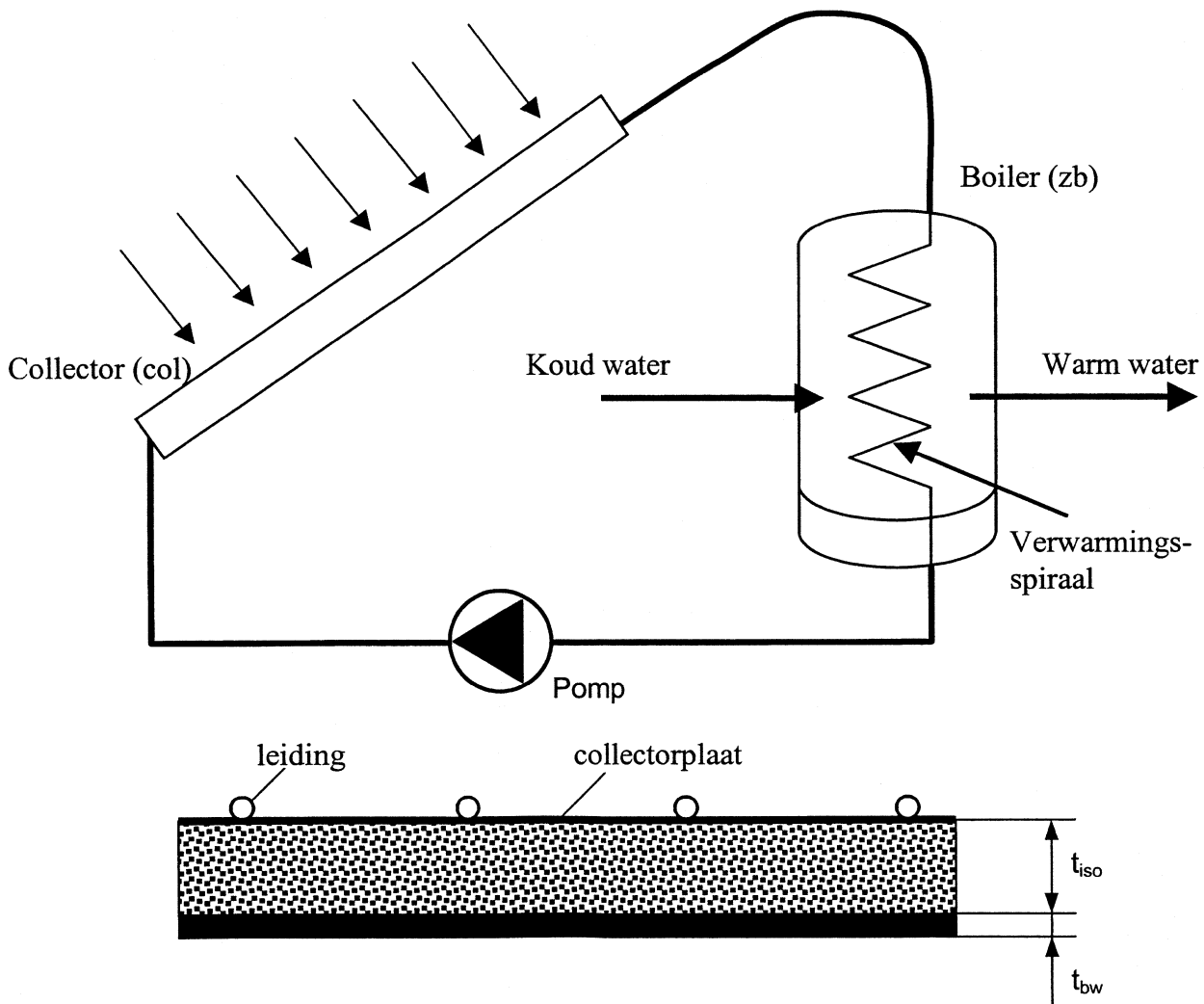
Oefenopgave 'De Zonneboiler'

Zonne-energie kan worden gewonnen door de opwarming van een zonnecollector door de zon. Een zonnecollector is een metalen plaat met daarop een dunne leiding gesoldeerd. Door de leiding stroomt water.

De zonnecollector bevindt zich in een bak met aan de bovenkant een glazenplaat met een lage absorptie van de warmtestraling van zonlicht. De onderkant en de zijkant zijn goed geïsoleerd om verlies van de geabsorbeerde warmte in de collector naar de omgeving te verminderen.

Er is een **primaire circuit** van water, dat door de leiding op de collector stroomt, door de verbindingen tussen de zonnecollector en de zonneboiler, en door de verwarmingsspiraal in de zonneboiler.

De regeling van de installatie zorgt ervoor dat het water in het primaire circuit gaat stromen als de temperatuur van de collector $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ hoger is dan het water in de zonneboiler. De circulatie stopt als het water in de zonneboiler een temperatuur van $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ heeft bereikt.



Dwarsdoorsnede van de collectorplaat met de leiding, de isolatie en de buitenwand

Gegevens:

Fysische grootheden van water:

Soortelijke massa	$\rho_{\text{water}} = 1000$	kg/m^3
Soortelijke warmte	$c_{\text{water}} = 4200$	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
Dynamische viscositeit	$\eta_{\text{water}} = 0,00100$	$\text{J/kg}\cdot\text{K}$
Warmtegeleidingscoëfficiënt	$\lambda_{\text{water}} = 0,5600$	$\text{W/m}\cdot\text{K}$

Volumestroom van het water in de collector:

Volumestroom in de collector	$\Phi_{\text{Vcol}} = 3,000$	liter/min
------------------------------	------------------------------	-----------

De antwoorden staan in appendix D

1. De warmtestroomdichtheid van de stralingsenergie van een zonnecollector**Toelichting:**

Een zonnecollector wordt verwarmd door de straling van de zon en het grootste deel van deze warmte wordt overgedragen aan het water dat door een leiding op de collector stroomt. Er treedt door straling van de collectorplaat naar de ∞ ruimte ook warmteverlies op.

Specifieke gegevens:

Temperatuur van de zonnecollector plaat:	$\theta_{\text{col}} = 100,0$	$^{\circ}\text{C}$
Emissiecoëfficiënt van de zonnecollector plaat:	$\varepsilon_{\text{col}} = 0,05$	
Oppervlakte van de zonnecollector plaat:	$A_{\text{col}} = 5,000$	m^2
Temperatuur van de ruimte:	$\theta_r = -273,0$	$^{\circ}\text{C}$
Emissiecoëfficiënt van de ruimte:	$\varepsilon_r = 1,000$	

Gevraagd:De warmtestroomdichtheid ϕ_w van de stralingsenergie vanaf de collector naar de ruimte**2. Benodigd vermogen voor het pompen van water door een zonnecollector****Toelichting:**

Een zonnecollector wordt verwarmd door de straling van de zon en deze warmte wordt overgedragen aan het water, dat door een leiding op de collector stroomt (zie de figuur van de dwarsdoorsnede in de inleiding).

Specifieke gegevens:

Inwendige leidingdiameter	$d_1 = 14,00$	mm
Oppervlaktegesteldheid:	zeer glad	
Lengte	$L_1 = 50,00$	m

Gevraagd:

Het benodigde vermogen van de pomp P om het water door de collector te pompen.

3. Temperatuur van een zonnecollectorplaat

Toelichting:

Een zonnecollector wordt verwarmd door de zonnestraling en deze warmte wordt overgedragen aan het water dat door een leiding op de collector stroomt. Als de temperatuur van het water in de zonneboiler hoger dan 80 °C is, dan wordt er geen water door de leiding op de collector gepompt.

Specifieke gegevens:

Buitentemperatuur:	θ_{bu}	=	10,00 °C
Dikte van de isolatie:	t_{iso}	=	30,00 mm
Warmtegeleidingscoëfficiënt van de isolatie:	λ_{iso}	=	0,040 W/(m·°C)
Dikte van de buitenwand van de collector:	t_{bw}	=	3,000 mm
Warmtegeleidingscoëfficiënt van het materiaal van de buitenwand:	λ_{bw}	=	40,00 W/(m·°C)
Warmteoverdrachtscoëfficiënt naar de buitenlucht:	α	=	10,00 W/(m ² ·°C)
De warmtestroomdichtheid van de warmte die via conductie en convectie naar buiten wordt afgevoerd:	ϕ_{wafv}	=	90,00 W/m ²

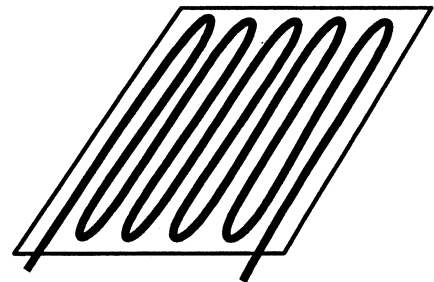
Gevraagd:

De temperatuur van de collectorplaat θ_{col} als er geen water door de collector stroomt.

4. Lengte van de leiding in de collector

Toelichting:

Een koperen leiding is op een collectorplaat gesoldeerd. Door deze leiding stroomt water dat door de collectorplaat wordt verwarmd.



Specifieke gegevens:

Temperatuur van het instromende water	θ_{in}	=	10 °C
Collectortemperatuur	θ_{col}	=	20 °C
Buitendiameter van de leiding in de zonnecollector	D_{leid}	=	54,00 mm
Wanddikte van de leiding in de zonnecollector	t_{leid}	=	2,000 mm

Gevraagd:

Bereken de benodigde lengte L_{leid} van de leiding, als de temperatuur van het water waarmee het de zonnecollector verlaat, gelijk moet zijn aan de temperatuur van de collector.

Aanwijzing:

Stel de warmtebalans op voor de toename van de temperatuur van het water dat door de leiding in de collector stroomt en de warmte die door convectie wordt overgedragen.

5. Drukverschil voor het rondpompen van water in het primaire circuit

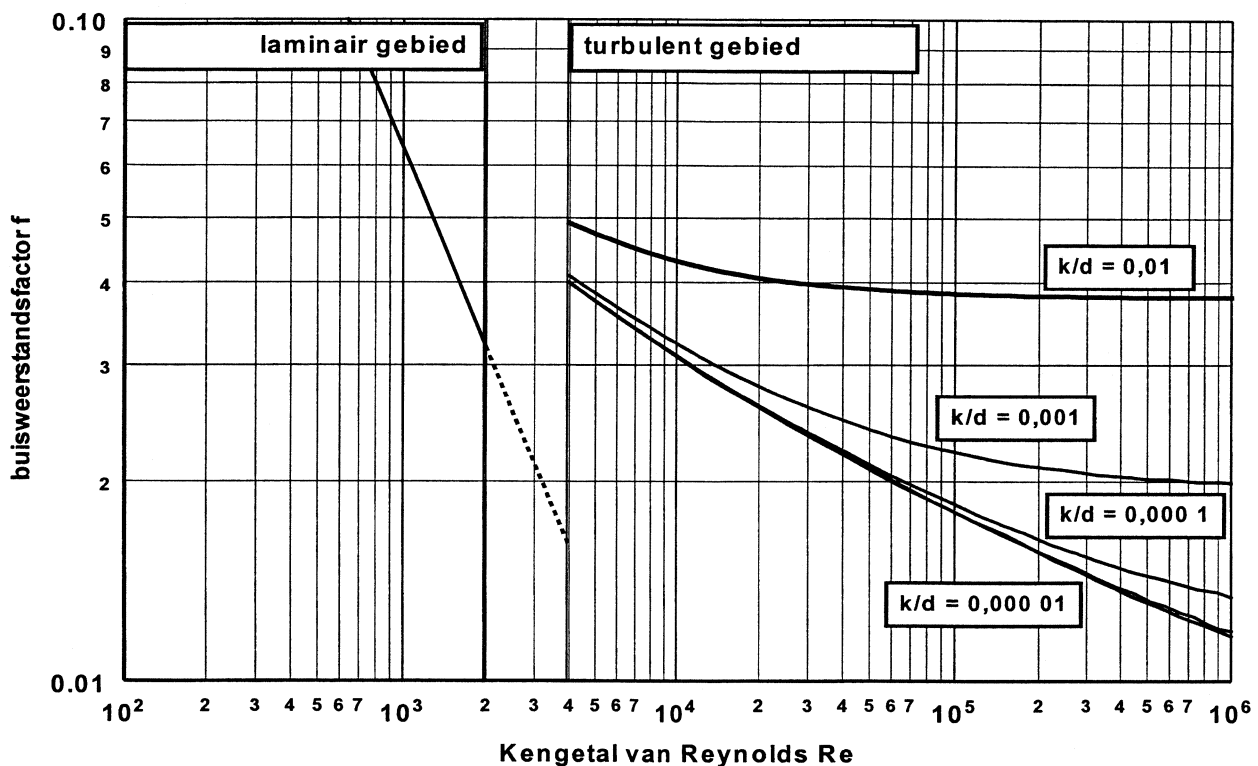
Toelichting:

Door het primaire circuit van een zonne-energie installatie wordt water gepompt. De diameter van de leiding in de collector is klein om een zo hoog mogelijke warmteoverdracht te krijgen. De diameter van de leidingen buiten de collector zijn groter om een zo laag mogelijke stromingsweerstand te krijgen.

Specifieke gegevens:

Ruwheid van de leiding in de collector	$k = 0,0100$ mm
Binnendiameter leiding in de zonnecollector	$d_1 = 10,00$ mm
Lengte van de leiding in de collector	$L_1 = 5,000$ m
Binnendiameter van de leidingen buiten de zonnecollector	$d_2 = 33,00$ mm
Lengte van de leidingen buiten de collector	$L_2 = 40,00$ m
Aantal bochten in de leidingen buiten de collector	$n = 3$
Verliescoëfficiënt van een bocht	$\zeta = 3,000$

Diagram van Moody (voor $0,01 < f < 0,1$)!!!!!!



Gevraagd:

Bereken het benodigde drukverschil Δp voor het rondpompen van het water in het primaire circuit van de zonnecollector en zonneboiler

Aanwijzing:

Begin met te bepalen of de stroming(en) laminair of turbulent zijn!!

APPENDIX D

Antwoorden van de oefenopgaven

Hoofdstuk 2

2.1 Krachten benodigd voor het langs elkaar bewegen van vlakke platen

De snelheidsgradiënt is voor alle vloeistoffen gelijk : $\frac{U}{h} = 1 \cdot 10^3 \cdot s^{-1}$

$\tau_{\text{lucht}} = \eta_{\text{lucht}} \cdot 1 \cdot 10^3 =$	0.018 Pa	$F_{\text{lucht}} = \tau_{\text{lucht}} \cdot A =$	$1.8 \cdot 10^{-4}$ N
$\tau_{\text{water}} =$	1 Pa	$F_{\text{water}} =$	0.01 N
$\tau_{\text{motorolie}} =$	$1 \cdot 10^3$ Pa	$F_{\text{motorolie}} =$	10 N

Hoofdstuk 3

3.1 Buis met water en vloeistof:

De snelheid in de buis na toevoeging: $6 < v_3 < 6.5$ m/s.

3.2 U-buis:

Het wateroppervlak in de andere been stijgt 2 cm.

3.3 Vernauwing in een pijp:

De snelheid neemt toe en de druk neemt af.

3.4 venturibuis

De massastroom voor het gemeten drukverschil $p_1 - p_2$ is $\Phi_m = 0,952$

Hoofdstuk 4

4.1 Meten viscositeit van een vloeistof

4.2 Poiseuille stroming in een spleet:

a) Verloop van de snelheid u als functie van y : $u(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{\Delta p}{l} y(y-h)$

b) $f = (\Delta p/l) \cdot h \cdot (\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_{\text{gem}}^2)^{-1}$ $f = 0.24$

4.3 Water en vloeibare kunststof door een buis:

a) Er geldt: $v_{\text{max}} = 2 v_{\text{gem}}$ en $v_{\text{gem}} = -\frac{R^2}{8\eta} \frac{dp}{dx}$

$$v_{\text{max}} = [-2 \cdot (0.5 \cdot 10^{-2})^2 / 8 \cdot 10^{-3}] \cdot -10^3 = 6.25 \text{ m/s}$$

b) Er geldt: $v_{\text{max}} = [-2 \cdot (0.5 \cdot 10^{-2})^2 / 8 \cdot 2 \cdot 10^4] \cdot \frac{dp}{dx} = 6.25 \text{ m/s}$

$$\frac{dp}{dx} = -2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^3$$

Hoofdstuk 6

6.1. Beluchtungsleiding

a) Het uitstroomverlies is altijd 1, te berekenen met de wet van Bernoulli ($v=0$)

$$b) \quad \Delta p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot (\zeta_{\text{inlaat}} + \zeta_{\text{klep}} + \zeta_{\text{uitlaat}} + 2 \cdot \zeta_{\text{bocht}} + f \cdot L/D)$$

$$\text{laminare buisstroming : } f = 64/Re \quad Re = \eta / (\rho \cdot v \cdot D)$$

$$\Delta p = 4.9 \cdot v^2 + 2.3 \cdot v$$

oplossen kan door:

- v (of indirect de volumestroom en daardoor dus indirect v) meten en Δp te berekenen.

- Δp meten en v berekenen door de wortelvergelijking op te lossen.

c) Bereken k/D en zoek een waarde voor f in het Moody-diagram.

$$k/D = 0.006 \quad \Rightarrow \quad \text{probeer } f = 0.032$$

Invullen van:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \cdot (\zeta_{\text{inlaat}} + \zeta_{\text{klep}} + \zeta_{\text{uitlaat}} + 2 \cdot \zeta_{\text{bocht}} + f \cdot L/D)$$

$$\text{geeft: } v = \sqrt{(4300 / (\frac{1}{2} \cdot 1.205 \cdot (8.1 + 0.032 \cdot 109)))} = 24.8 \text{ m/s}$$

$$\text{Reken nu Re uit: } Re = \eta / (\rho \cdot v \cdot D) = 4.5 \cdot 10^4$$

Opzoeken in het Moody-diagram $Re_D = 4.5 \cdot 10^4$ en $k/D = 0.006$ geeft $f = 0.034$.

Nu v uitrekenen met $f = 0.034$:

$$v = \sqrt{(4300 / (\frac{1}{2} \cdot 1.205 \cdot (8.1 + 0.034 \cdot 109)))} = 24.6 \text{ m/s}$$

En de volume stroom wordt gegeven door:

$$\phi_v = v \cdot \pi/4 \cdot D^2 = 14.6 \text{ l/s}$$

Hoofdstuk 7

7.1. Volkswagen kever cabrio:

$$a) \quad F_w = c_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A = 0.68 \cdot \frac{1}{2} \cdot (75/3.6)^2 \cdot 1.76 = 325 \text{ N}$$

$$b) \quad P = F_w \cdot v = 6764 \text{ Watt}$$

$$c) \quad P = F_w \cdot v = 21926 \text{ Watt} \quad [v = (75/3.6) + 10 \text{ m/s}]$$

Hoofdstuk 9

9.1. Vrieskist:

a) $t_{egr} = \theta_1 - \theta_2 / \Delta x$
 $t_{egr} = 5000 \text{ Cm}^{-1}$

b) $\phi_w = \lambda \cdot (\theta_1 - \theta_2 / \Delta x)$
 $\phi_w = \lambda \cdot t_{egr}$ Invullen levert: $\phi_w = 500 \text{ W/m}^2$

c) $\Phi_w = A \cdot \phi_w$
 $\Phi_w = 2.5 \cdot 10^3 \text{ W}$

d) $k_1 = \lambda_1 / \Delta x_1 = 10 \text{ W/m}^2\text{C}$ $R_1 = 1/k_1$
 $k_2 = \lambda_2 / \Delta x_2 = 0.4 \text{ W/m}^2\text{C}$ $R_2 = 1/k_2$

Bereken dan de thermische weerstand:

$$R_{th} = R_1 + R_2 = (1/10 + 1/0.4) = 2.6 \text{ m}^2\text{C/W}$$

Voor de warmtestroomdichtheid geldt: $\phi_w = (\theta_1 - \theta_3)/R_{th}$

Invullen levert: $\phi_w = 19.231 \text{ W/m}^2$

e) Voor de warmtestroom geldt: $\Phi_w = A \cdot \phi_w$ Invullen levert: $\Phi_w = 96.154 \text{ W}$

f) θ_2 is op twee manieren te berekenen:

$$\theta_2 = (\phi_w \cdot R_2) + \theta_3 = 23.077 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\theta_2 = \theta_1 - (\phi_w \cdot R_1) = 23.077 \text{ }^\circ\text{C}$$

9.2 Conductief en convectief warmtetransport

warmte weerstand (gas-pijp) $r_{gp} = \frac{1}{\alpha_{gp}} = 0,0100 \frac{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}{\text{W}}$

warmte weerstand (pijpwand) $r_{wand} = \frac{t_{wand}}{\lambda} = 0,000025 \frac{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}{\text{W}}$

warmte weerstand (pijpwater) $r_{pw} = \frac{1}{\alpha_{pw}} = 0,0010 \frac{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}{\text{W}}$

totale specifieke weerstand $r_{tot} = r_{gp} + r_{wand} + r_{pw} = 0,011025 \frac{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}{\text{W}}$

De warmtestroomdichtheid wordt het sterkst beperkt door de warmtestroom met de grootste warmte weerstand. Dit is de warmtestroom van gas naar pijp.

9.3 Warmteoverdracht door straling tussen 2 concentrische cilinders

De absolute temperatuur: $T = \theta + 273 \text{ K}$

Het manteloppervlak: $A = \pi \cdot d \cdot L$

De warmtestroom is gelijk aan:

$$\Phi_w = \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) \cdot A_1 / A_2} \cdot \sigma \cdot A_1 \cdot (T_1^4 - T_2^4) \quad (9.25)$$

Hierin geldt *per meter* ($L = 1$ meter):

$$A_1 = 0,0031 \text{ m}^2 \quad A_2 = 0,314 \text{ m}^2$$

$$T_1 = 773 \text{ K} \quad T_2 = 373 \text{ K}$$

Hieruit volgt dat de warmtestroom *per meter* gelijk is aan:

$$\Phi_{w/meter} = 546,7 \text{ W/m}$$

Dit geeft de benodigde lengte voor de gevraagde warmtestroom:

$$L = \frac{\Phi_w}{\Phi_{w/meter}} = 0,9145 \text{ m}$$

Hoofdstuk 10

10.1 Warmteoverdracht van verbrandingsgas naar water:

a) De inwendige diameter van de leiding:

$$d_{leid} = D_{leid} - 2 \cdot \delta_{leid} = 0.011 \text{ m}$$

b) De oppervlakte van de doorsnede van de buis:

$$A_{leid} = (\pi \cdot d_{leid}^2) / 4 = 95.03 \text{ mm}^2$$

De gemiddelde snelheid voor $\Phi_{V_{laag}}$:

$$u_{laag} = \Phi_{V_{laag}} / A_{leid} = 0.175 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

De gemiddelde snelheid voor $\Phi_{V_{hoog}}$:

$$u_{hoog} = \Phi_{V_{hoog}} / A_{leid} = 0.438 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Het getal van Reynolds:

$$Re_{laag} = (d_{leid} \cdot u_{laag} \cdot \rho_{water}) / \eta_{water} = 1\,929$$

$$Re_{hoog} = (d_{leid} \cdot u_{hoog} \cdot \rho_{water}) / \eta_{water} = 4\,823$$

e) Getal van Prandt:

$$Pr = (\eta_{water} \cdot c_{water}) / \lambda = 7.5$$

f) Getal van Nusselt:

$$Nu_{laag} = 3.66 + \frac{0.057 \cdot \frac{Re_{laag} \cdot Pr \cdot d_{leid}}{L_{leid}}}{1 + 0.04 \cdot \left(\frac{Re_{laag} \cdot d_{leid}}{L_{leid}} \right)^{0.8}} = 5.38$$

$$Nu_{hoog} = 0.023 \cdot Re_{hoog}^{0.8} \cdot Pr^{0.4} = 45.54$$

g) Warmte-overdrachtscoëfficiënt:

$$\alpha_{laag} = Nu_{laag} \cdot (\lambda_{water} / d_{leid}) = 273.9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\alpha_{hoog} = Nu_{hoog} \cdot (\lambda_{water} / d_{leid}) = 2318.4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

h) De temperatuur van het tapwater:

$$A_{verw} = L_{leid} \cdot \pi \cdot d_{leid} = 0.068 \text{ m}^2$$

$$\theta_{tap, laag} = \frac{\left[\left[\Phi v_{laag} \cdot \rho_{water} \cdot c_{water} - \frac{A_{verw} \cdot \alpha_{laag}}{2} \right] \cdot \theta_{in} + A_{verw} \cdot \alpha_{laag} \cdot \theta_{plaat} \right]}{\left(\Phi v_{laag} \cdot \rho_{water} \cdot c_{water} \right) + \left(\frac{A_{verw} \cdot \alpha_{laag}}{2} \right)} = 27.4^\circ \text{C}$$

$$\theta_{tap, hoog} = \frac{\left[\left[\Phi v_{hoog} \cdot \rho_{water} \cdot c_{water} - \frac{A_{verw} \cdot \alpha_{hoog}}{2} \right] \cdot \theta_{in} + A_{verw} \cdot \alpha_{hoog} \cdot \theta_{plaat} \right]}{\left(\Phi v_{hoog} \cdot \rho_{water} \cdot c_{water} \right) + \left(\frac{A_{verw} \cdot \alpha_{hoog}}{2} \right)} = 53.7^\circ \text{C}$$

Hoofdstuk 11

11.1 De bitterbal:

Er geldt:

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} = 0,1 \text{ mm}^2/\text{s}$$

$$\theta\theta = \frac{\theta_{vet} - \theta_{kern}}{\theta_{vet} - \theta_{bal}} = \frac{180 - 100}{180 - 0} = 0,444 \quad (1)$$

De standaard formule:

$$\frac{\theta_w - \theta_c}{\theta_w - \theta_0} = C_1 e^{-C_2 Fo} \quad (2)$$

Combineer (1) en (2) en vul $C_1 = 2.0$ en $C_2 = 9,67$ in.

$$Fo = \frac{-1}{C_2} \cdot \ln \left[\frac{\theta\theta}{C_1} \right] = 0,1556 \text{ met } Fo = \frac{a \cdot t}{D^2}$$

Dan wordt $t = 350$ seconden.

(In de grafiek opzoeken kan ook. $F_0 = 0.16$, invullen geeft $t = 360$ s)

11.5.2 Opwarming van messing cilinders

$$\frac{V}{A} = \frac{\pi \cdot r_{cil}^2 \cdot L}{2 \cdot \pi \cdot r_{cil} \cdot L} = \frac{r_{cil}}{2} = 2,5 \text{ mm}$$

$$\theta = 95 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\tau = \frac{\rho \cdot c \cdot V}{\alpha_{95} \cdot A} = 8,181 \text{ s}$$

$$Bi = \frac{\alpha_{95}}{\lambda} \cdot \frac{V}{A} = 0,023$$

$$\theta_{20} = \theta_{begin} + \left(1 - e^{-\frac{20s}{\tau}} \right) \cdot (\theta_I - \theta_{begin}) = 88,4930 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\theta = 100 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\tau = \frac{\rho \cdot c \cdot V}{\alpha_{100} \cdot A} = 1,636 \text{ s}$$

$$Bi = \frac{\alpha_{100}}{\lambda} \cdot \frac{V}{A} = 0,114$$

$$\theta_{20} = \theta_{begin} + \left(1 - e^{-\frac{20s}{\tau}} \right) \cdot (\theta_{II} - \theta_{begin}) = 99,9996 \text{ }^\circ\text{C}$$

Appendix C (Zonneboiler)

1. $\phi_w = 54,87 \text{ W/m}^2$
2. $P = 0,3625 \text{ W}$
3. $\theta_{col} = 86,5 \text{ }^\circ\text{C}$
4. $L_{leid} = 51,488 \text{ m}$
5. $\Delta p = 3732 \text{ Pa}$

APPENDIX E

Dimensie-analyse

Dimensie-analyse is een combinatie van theoretische beschouwingen en experimentele resultaten. De essentie ervan is dat:

alle relevante fysische en geometrische **invloedsgrootheden** bepaald worden;
er door combineren van deze fysische en geometrische grootheden **dimensieloze groepen** gegenereerd worden;
de **relevante groepen** voor een verschijnsel als **kengetal** genomen worden;
er naar **relaties tussen de kengetallen** wordt gezocht en er theoretische beschouwingen en experimentele resultaten gebruikt worden voor de functie tussen de kengetallen;

In deze appendix zoeken we naar de relatie tussen de warmte-overdrachtscoëfficiënt α en de stromings-, geometrie-grootheden en de thermische eigenschappen. De warmte-overdrachtscoëfficiënt α komt voor in het kengetal van Nusselt, de stromingseigenschappen in het kengetal van Reynolds en de thermische eigenschappen in een nog te bepalen kengetal "Thermisch".

De betrekkingen worden vaak geschreven als een product van de kengetallen en in ons geval dus van:

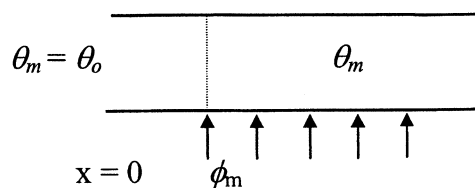
$$Nu = C \cdot Re_D^m \cdot (\text{Thermisch})^n \quad (10.09)$$

In de paragrafen 10.1 en 10.2 hebben we gezien dat we α of Nu als functie van x moeten kennen. We proberen nu met dimensie-analyse de kengetallen te bepalen voor de warmte-overdracht bij de stroming van een incompressibel fluïdum door een buis. Ter vereenvoudiging maken we twee veronderstellingen:

De **fluïdumeigenschappen** ρ , η , λ en c zijn **onafhankelijk van de temperatuur**. Dit impliceert dat voor de warmte-overdracht alleen temperatuurverschillen belangrijk zijn. Hiermee besparen we een variabele, omdat θ_w van de wand en θ_m van het fluïdum niet als aparte grootheden opgevoerd hoeven te worden, het gaat hier om $\Delta\theta = \theta_w - \theta_m$.

We **verwaarlozen de dissipatie** en werken met de warmtebalans. Dat betekent volgens paragraaf 10.2 dat we naast de vier basisgrootheden M (massa), L (lengte), T (tijd) en θ (temperatuur) een vijfde basisgrootheid kunnen invoeren: de warmtehoeveelheid Q .

Beschouw figuur E.1.



Figuur E.1 Opwarming van een fluïdum in een buis

De verwarming begint bij $x = 0$. De temperatuurverdeling in het fluïdum is daar nog homogeen: θ . Het temperatuurverschil ter plaatse is daar dus:

$$\Delta\theta_0 = \theta_w - \theta_0 \quad (E.01)$$

We gaan nu het lijstje van **invloedsgrootheden** met hun dimensies opstellen:

warmtestroomdichtheid door de binnenwand van de buis:	ϕ_w	: $L^{-2}T^{-1}Q$
begin-temperatuurverschil:	$\Delta\theta_0$: θ
warmtegeleidingscoëfficiënt:	λ	: $L^{-1}T^{-1}\theta^{-1}Q$
soortelijke warmte:	c	: $M^{-1}\theta^{-1}Q$
dichtheid:	ρ	: ML^{-3}
dynamische viscositeit:	η	: $ML^{-1}T^{-1}$
gemiddelde snelheid:	v_{gem}	: LT^{-1}
buislengte vanaf begin van de verwarming:	x	: L
buisdiameter:	D	: L

Dit zijn 9 basisgrootheden met 5 basisdimensies. We kunnen hieruit dus 4 dimensieloze groepen vormen. We kiezen vijf secundaire basisgrootheden: $\Delta\theta_0$, ρ , η , v en D . Op de in de appendix beschreven wijze vinden we dan als dimensieloze groepen:

$$\frac{\phi_w D}{\lambda \Delta\theta_0}, \frac{\eta c}{\lambda}, \frac{\rho v_{gem} D}{\eta}, \frac{x}{D} \quad (E.02)$$

De **eerste groep** kennen we als het kengetal van **Nusselt**:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot D}{\lambda} = \frac{\phi_w \cdot D}{(\theta_w - \theta_m) \cdot \lambda} \quad (10.08)$$

De **tweede groep** is het zogenaamde kengetal van **Prandt**:

$$Pr = \frac{\eta \cdot c}{\lambda} \quad (10.10)$$

De **derde groep** is weer een bekende: het **kengetal van Reynolds**:

$$Re = \frac{\rho \cdot v_{gem} \cdot D}{\eta}$$

De **vierde groep** is **geen kengetal**, maar een mogelijkheid om de coördinaat x dimensieloos te maken:

$$x^1 = \frac{x}{D}$$

Tussen de **vier groepen** bestaat een verband zodat Nu een functie van Re , Pr , en x/D wordt:

$$Nu = f\left(Re, Pr, \frac{x}{D}\right) \quad (10.11)$$

Deze betrekking is algemeen geldig, zowel voor **laminaire als turbulente** stromingen.

Het kengetal van **Prandtl** kunnen we schrijven als:

$$Pr = \frac{\eta \cdot c}{\lambda} = \frac{\eta/\rho}{\lambda/\rho \cdot c} = \frac{\nu}{a} \quad (\text{E.03})$$

Dit is een fluïdumeigenschap. $a = \lambda/\rho c$ heet de temperatuurvereffeningscoëfficiënt en heeft dezelfde dimensie als ν , m^2/s .

De **kinematische viscositeit** ν is een maat voor de snelheid waarmee impuls op moleculaire schaal in de stroming diffundeert en

De **temperatuurvereffeningscoëfficiënt** a is een maat voor de diffusie van de warmte.

Als ρc groot is, wordt de op moleculaire schaal doorgeleide warmte als inwendige energie goed opgenomen in het fluïdum. De warmte dringt dus niet ver door. $Pr > 1$ wil dus zeggen dat de warmte achterblijft ten opzichte van de impuls. Dit is het geval bij slecht geleidende viskeuze fluïda, zoals oliën. $Pr < 1$ is het geval bij goed warmte geleidende fluïda, zoals vloeibare metalen. Ter oriëntatie volgen hier enkele waarden:

glycerine	:	$Pr \approx 10^4$	(sterk temperatuur afhankelijk)
water	:	$Pr \approx 10$	(sterk temperatuur afhankelijk)
lucht	:	$Pr \approx 0,7$	(zwak temperatuur afhankelijk)
vloeibaar natrium	:	$Pr \approx 0,005$	(zwak temperatuur afhankelijk)

APPENDIX F

Trefwoordenregister	paragraaf
afkoelingswet van Newton	9.4
afkoelingswet van Newton	10.1
afschuifsnelheid (γ^* of du/dy)	2.2
aggregatietoestanden	8.3
appendages	6.5
arbeid	3.3
arbeid	4.1
bewegingsenergie	3.3
bochten	6.6
buisruwheidswaarden	6.1
buisweerstandsfactor	2.5
buisweerstandsfactor	4.3
buisweerstandsfactor	6.1
calorie	8.1
cilindrische koelpen	10.6
coherente structuren	5.1
conductie	9.1
conductie	10.6
constante van Stefan-Boltzmann	9.6
continuüm	2.1
controle oppervlak	3.1
controle volume	3.2
convectie	9.4
Couette stroming	4.1
diagram van Moody	6.1
dimensie-analyse	10.3
dimensie-analyse	Appendix D
dimensieloos getal	2.4
dissipatie	4.1
dissipatie	5.1
dissipatie	6.6
drijvende temperatuurverschil	10.6
dynamische viscositeit (η);	2.2
ééndimensionale warmtegeleiding	9.3
elektromagnetische straling	9.6
emissiecoëfficiënt	9.6
energiebalans	3.3
fluïdum;	2.1
formule van Dittus en Boelter	10.4
gedwongen convectie	9.4
geometrie-constanten	11.3
grenslaag	7.1
grenslaagstroming	5.2
hechtvoorwaarde	2.1
hechtvoorwaarde	7.1
hydrostatische druk	3.5
incompressibele stroming	3.5
instabiele stroming	5.3
instabiele stroming	7.1
instroomverlies	6.3

inwendige energie	3.3
Joule	8.1
karakteristieke temperatuur	10.1
karakteristieke temperatuur	11.3
kengetal van Biot	11.2
kengetal van Fourier	11.3
kengetal van Nusselt	10.2
kengetal van Prandtl	10.3
kengetal van Reynolds	2.4
Kilocalorie	8.1
kinematische viscositeit	2.2
kinetische energie	3.3
koelpennen/ -vinnen	10.6
kritiek gebied	6.1
laminaire stroming	2.3
laminaire stroming in ronde buis	4.3
laminaire stroming	6.1
loslating	7.1
luchtweerstand	7.2
massabalans	3.2
massastroom	3.1
mengtemperatuur	10.2
moleculaire diffusie	5.1
Newtonse fluïda	2.2
omslag	7.1
omstroming	5.1
ontwikkelde stroming	2.3
ontwikkelde stroming	6.1
ontwikkelde stroming	10.4
potentiaalstroming	7.2
potentiële energie	3.3
randvoorwaarden	9.2
rendement koelpen	10.6
rooster-trillingen	9.1
ruwheid	4.3
schijnbare viscositeit	7.2
smeltwarmte	8.3
snelheidsgradiënt	2.2
snelheidsprofiel	6.2
soortelijke warmte	8.2
specifieke thermische weerstand	9.3
stationaire stroming	3.5
straling	9.6
stroomlijn	3.4
temperatuurvereffeningscoëfficiënt	10.3
temperatuurvereffeningscoëfficiënt	11.3
thermisch evenwicht	8.1
thermische weerstand	9.3
turbulente stroming	2.3
turbulentie	5.1
uitstroomverlies	6.4
uitwisseling van energie	8.1
Venturi-buis	3.6
verdampingswarmte	8.3
verliescoëfficiënt	6.3

vermogen	3.3
viskeuze stroming	4.3
vlakke Poiseuille-stroming	4.2
volumestroom	3.1
vormweerstand	7.2
vrije convectie	9.4
vrije straal	5.1
vrije turbulente stromingen	5.2
wandturbulentie	5.2
warmte	8.1
warmtecapaciteit	11.2
warmtegeleidingscoëfficiënt	9.1
warmte-overdracht	2.5
warmte-overdrachtscoëfficiënt	10.3
warmte-overgangscöëfficiënt	9.4
warmte-overgangscöëfficiënt	10.1
warmteproductie	9.3
warmtestroom	9.1
warmtestroomdichtheid	9.1
weerstandscöëfficiënt	7.2
weerstandsfactor	6.2
werveldiffusie	5.1
wervels	5.1
wet van Bernoulli	3.4
wet van Fourier	9.1
wet van Newton	2.2
wet van Stefan-Boltzmann	9.6
wrijvingsloze stroming	4.3
wrijvingsweerstand	7.2
zog	7.1
zogstroming	5.2
zwarte lichamen	9.6

De bovenstaande woordenlijst geeft de paragrafen aan, waarop het betreffende woord voorkomt.

Literatuur

Stromingsleer

Fox, E.W. and A.T. McDonald, *Introduction to Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1994

Warmteleer

Carlslaw H.S. and J.C. Jeager, *Conduction of heat in solids, 2nd edition*, Oxford Science Publications, Clarendon Publications, 1988, Oxford

Holman, J.P., *Heat transfer*, McGraw-Hill, New York, 1992

Collegedictaten

Leijdens, H., *Dictaat Stroming en warmteoverdracht I*, Faculteit WbMT, TU Delft, Delft 1992

Halliday, D., R. Resnik & J. Walker, *Fundamentals of Physics*, John Wiley & Sons, Inc., New York 1993 (Chapter 16 Fluids & Chapter 20 Heat and the First Law of Thermodynamics)

Instituut voor Studie en Stimulering van Onderzoek op het gebied van gebouwinstallaties (ISSO) publicaties

ISSO publicatie 14: Zonneboilers ontwerp, uitvoering en advisering, Rotterdam 1992

ISSO publicatie 30: Tapwaterinstallaties in woningen, Rotterdam